В. Л. МИРОНОВ, С. В. МИРОНОВ

ПРОСТРАНСТВЕННО - ВРЕМЕННЫЕ СЕДЕОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

$$\mathbf{e}_t \mathbf{e}_r = i\,\mathbf{e}_{tr}$$

2018

В.Л. МИРОНОВ, С.В. МИРОНОВ

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СЕДЕОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
2018

УДК 51+53
ББК 22.31
М64

Миронов, В. Л.
Пространственно-временные седеоны и их применение в релятивистской квантовой механике и теории поля / В.Л.Миронов, С.В.Миронов – Новосибирск: Издательство СО РАН, 2018. – 135 с.

ISBN 978-5-7692-1587-2

Настоящая книга представляет собой систематизированное изложение алгебры шестнадцатикомпонентных пространственно-временных величин – “седеонов” и ее применений для описания квантовых частиц и полей.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области математической и теоретической физики.

Рецензенты:

доцент кафедры прикладной математики
Института информационных технологий математики и механики
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
к. ф.-м. н. А.В. Калинин

заведующий кафедрой прикладной математики
Института информационных технологий математики и механики
ННГУ им. Н.И. Лобачевского
д. ф.-м. н., профессор М.В. Иванченко

ISBN 978-5-7692-1587-2

Мироновой Г.В.,

жене и маме

Содержание

Предисловие

Настоящая книга представляет собой систематизированное изложение алгебры шестнадцатикомпонентных пространственно-временных величин – “седеонов” и ее применений для описания квантовых частиц и полей. В книгу вошли результаты серии статей, опубликованных авторами в период 2008 – 2017 г.г. Она содержит большое количество тщательно отобранного библиографического материала, касающегося вопросов применения различных многокомпонентных алгебр в приложении к физическим задачам и, возможно, будет полезна в качестве введения в смежные области применения гиперкомплексных чисел в физике.

Авторы выражают благодарность Г.В. Мироновой за помощь и моральную поддержку, M. Tanişli и J. Köplinger за полезные обсуждения.

Авторы будут признательны каждому, кто сообщит о любых замеченных недостатках.

В.Л. Миронов и С.В. Миронов

Апрель, 2018 г.

Замечания направлять по адресу:

603950, г. Нижний Новгород, ГСП-105
Институт физики микроструктур РАН
Филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения “Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук”.

Виктор Миронов: mironov@ipmras.ru

Сергей Миронов: sermironov@rambler.ru

Введение

Одна из первых некоммутативных многокомпонентных алгебр – алгебра четырехкомпонентных кватернионов – была открыта в 1843 г. В. Гамильтоном [1, 2]. По существу, кватернионы представляют собой обобщение комплексных чисел на пространство размерности 4. Вслед за кватернионами Д. Грейвс (1843 г.) и независимо А. Кэли (1845 г.) предложили восьмикомпонентные величины – октонионы [3]. Алгоритм построения октонионов на основе кватернионов носит название процедуры удвоения Кэли–Диксона и позволяет провести обобщение кватернионов на любые пространства размерности 2^n и, в частности, построить шестнадцатикомпонентные гиперкомплексные числа – седенионы [4]. История открытия гиперкомплексных чисел частично рассмотрена в работах [3, 5]. Систематическое изложение теории кватернионов и гиперкомплексных алгебр более высокой размерности можно найти в книгах на русском и английском языках [6–11]. Обширная библиография по применению кватернионов в физике содержится в обзорах [12, 13].

Существенным недостатком алгебр гиперкомплексных чисел размерности выше 4 является неассоциативность, что значительно затрудняет их применение для описания физических систем, поскольку во всех уравнениях приходится фиксировать определенную последовательность действий всех операторов. Однако гиперкомплексные числа Кэли–Диксона не являются единственной выделенной алгебраической системой, на основе которой можно построить описание физических систем. Существуют и другие альтернативные подходы, основанные на применении ассоциативных алгебр многокомпонентных векторов и алгебр Клиффорда [14, 15].

В настоящей книге приводится систематизированное изложение предложенной авторами ассоциативной алгебры шестнадцатикомпонентных пространственно-временных величин "седеонов" и ее применений для описания квантовых частиц и полей [16–21].

Глава 1

Кватернионы, векторы, матрицы

С математической точки зрения, одной из центральных проблем, рассматриваемых в данной книге, является проблема представления квадратичных форм

$$\sum_{k=1}^{N} A_k^2 \tag{1.1}$$

в виде произведения двух одинаковых сомножителей. В общем случае квадратичная форма (1.1) может быть выражена следующим образом:

$$\begin{gathered}\left(A_1^2 + A_2^2 + ... + A_k^2 + ...A_N^2\right) = \\ = \left(\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k + ... + \alpha_N A_N\right)\left(\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k + ... + \alpha_N A_N\right).\end{gathered} \tag{1.2}$$

Такое представление возможно при двух различных вариантах выбора систем величин α_k. Первый случай соответствует ортогональным коэффициентам α_k, для которых

$$\begin{aligned}&\alpha_k \alpha_k = 1,\\ &\alpha_m \alpha_n = 0 \ \ (\text{при } m \neq n).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Второй случай отвечает некоммутативным α_k, обладающим следующими свойствами:

$$\begin{aligned}&\alpha_k \alpha_k = 1,\\ &\alpha_m \alpha_n = -\alpha_n \alpha_m \ (\text{при } m \neq n).\end{aligned} \tag{1.4}$$

В настоящей книге для описания пространственно-временных и зарядовых свойств физических систем используется именно второй подход. В данной главе рассматриваются некоторые некоммутативные алгебры, применяемые в физике.

1.1. Кватернионы Гамильтона

Одним из величайших математических открытий 19 века является изобретение В.Р. Гамильтоном четырехкомпонентных комплексных чисел – кватернионов [1, 2]. Для записи кватернионов он предложил использовать специальные величины $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$, которые образуют базис кватерниона. Любой кватернион $\widehat{\boldsymbol{H}}$ может быть представлен в виде

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = H_0\mathbf{h_0} + H_1\mathbf{h_1} + H_2\mathbf{h_2} + H_3\mathbf{h_3}\,, \tag{1.5}$$

где компоненты кватерниона H_α $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ являются действительными числами. Базис $\mathbf{h_0}$, $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$ имеет следующие свойства. Величина $\mathbf{h_0}$ является простой единицей

$$\mathbf{h_0} \equiv 1 \tag{1.6}$$

и может быть для простоты опущена в записи кватерниона:

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = H_0 + H_1\mathbf{h_1} + H_2\mathbf{h_2} + H_3\mathbf{h_3}\,. \tag{1.7}$$

Величины $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$ обладают следующими свойствами по отношению к операции умножения. Во-первых, они являются мнимыми единицами, т. е. при умножении самих на себя дают –1. Во-вторых, они антикоммутируют друг с другом, т. е. при перестановке в произведении любых двух соседних элементов результат меняет знак. При этом произведение любых двух мнимых единиц равно третьей единице. Правила умножения для элементов $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$ можно записать в виде совокупности следующих соотношений:

$$\begin{gathered}
\mathbf{h_1 h_1} = (\mathbf{h_1})^2 = -1\,, \\
\mathbf{h_2 h_2} = (\mathbf{h_2})^2 = -1, \\
\mathbf{h_3 h_3} = (\mathbf{h_3})^2 = -1, \\
\mathbf{h_1 h_2} = -\mathbf{h_2 h_1} = \mathbf{h_3}\,, \\
\mathbf{h_2 h_3} = -\mathbf{h_3 h_2} = \mathbf{h_1}\,, \\
\mathbf{h_3 h_1} = -\mathbf{h_1 h_3} = \mathbf{h_2}\,.
\end{gathered} \tag{1.8}$$

В компактной форме эти соотношения могут быть представлены в виде таблицы (табл. 1).

Величина H_0 является скалярной частью, а выражение $\vec{H} = H_1\mathbf{h_1} + H_2\mathbf{h_2} + H_3\mathbf{h_3}$ – векторной частью кватерниона. Соответственно кватернион может быть представлен в виде суммы скаляра и вектора:

$$\widehat{\boldsymbol{H}} = H_0 + \vec{H}\,. \tag{1.9}$$

Во многом операции с кватернионами полностью аналогичны операциям с комплексными числами. Их можно почленно складывать и вычитать, а также умножать и делить друг на друга, при этом всегда будет получаться новый кватернион.

Таблица 1. Правила умножения и коммутации элементов $\mathbf{h_1}$, $\mathbf{h_2}$, $\mathbf{h_3}$

	$\mathbf{h_1}$	$\mathbf{h_2}$	$\mathbf{h_3}$
$\mathbf{h_1}$	-1	$\mathbf{h_3}$	$-\mathbf{h_2}$
$\mathbf{h_2}$	$-\mathbf{h_3}$	-1	$\mathbf{h_1}$
$\mathbf{h_3}$	$\mathbf{h_2}$	$-\mathbf{h_1}$	-1

Произведение кватерниона на комплексно сопряженный кватернион (норма кватерниона) равно сумме квадратов его компонент:

$$\widehat{\boldsymbol{H}}\widehat{\boldsymbol{H}}^* = \left(H_0 + H_1\mathbf{h_1} + H_2\mathbf{h_2} + H_3\mathbf{h_3}\right)\left(H_0 - H_1\mathbf{h_1} - H_2\mathbf{h_2} - H_3\mathbf{h_3}\right) = \\ = H_0^2 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2, \qquad (1.10)$$

и представляет собой положительное число. Этот результат обусловлен именно тем, что элементы кватернионного базиса $\mathbf{h_1}, \mathbf{h_2}, \mathbf{h_3}$ являются антикоммутирующими величинами. Поскольку кватернионы имеют положительно определенную норму, они являются системой чисел с делением. Деление одного кватерниона на другой производится следующим образом:

$$\frac{\widehat{\boldsymbol{H}}_1}{\widehat{\boldsymbol{H}}_2} = \frac{\widehat{\boldsymbol{H}}_1\widehat{\boldsymbol{H}}_2^*}{\widehat{\boldsymbol{H}}_2\widehat{\boldsymbol{H}}_2^*}. \qquad (1.11)$$

Важным свойством кватернионной алгебры является то, что произведение двух векторных частей равно кватерниону специального вида:

$$\vec{H}\,\vec{N} = -H_1N_1 - H_2N_2 - H_3N_3 + \\ +\left(H_2N_3 - H_3N_2\right)\mathbf{h_1} + \left(H_3N_1 - H_1N_3\right)\mathbf{h_2} + \left(H_1N_2 - H_2N_1\right)\mathbf{h_3}. \qquad (1.12)$$

В компактном виде это выражение может быть записано как

$$\vec{H}\,\vec{N} = -\left(\vec{H}\cdot\vec{N}\right) + \left[\vec{H}\times\vec{N}\right], \qquad (1.13)$$

где введены обозначения скалярного и векторного произведений:

$$\left(\vec{H}\cdot\vec{N}\right) = H_1N_1 + H_2N_2 + H_3N_3, \qquad (1.14)$$

$$\left[\vec{H}\times\vec{N}\right] = \left(H_2N_3 - H_3N_2\right)\mathbf{h_1} + \left(H_3N_1 - H_1N_3\right)\mathbf{h_2} + \left(H_1N_2 - H_2N_1\right)\mathbf{h_3}. \qquad (1.15)$$

Произведение векторов вида (1.13) в литературе называется произведением Клиффорда, или клиффордовским произведением.

В.Р. Гамильтон придавал большое значение кватернионам и фактически всю свою дальнейшую жизнь посвятил исследованию их свойств и пропаганде этой алгебры среди исследователей. Интерес к этой системе чисел был большой. В начале 20 века было организовано международное общество содействия изучению кватернионов. Регулярно издавался бюллетень общества. Однако с появлением более простой по технике вычислений векторной алгебры интерес к кватернионам постепенно ослаб, и общество содействия изучению кватернионов прекратило активную деятельность в связи с началом Первой мировой войны.

1.2. Векторная алгебра Гиббса–Хевисайда

После открытия кватернионов многие авторы начали использовать в своих исследованиях элементы исчисления, основанного на свойствах векторной части кватернионов. При этом элементы кватернионного базиса $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ интерпретировались как единичные векторы (орты) $\vec{\mathbf{h}}_1, \vec{\mathbf{h}}_2, \vec{\mathbf{h}}_3$. Недостатком такого подхода является то, что произведение вектора на самого себя получается отрицательной величиной, однако для адекватной геометрической интерпретации векторов естественным требованием является положительная определенность квадрата вектора. Казалось бы, эту проблему можно разрешить, изменив правила умножения так, чтобы произведение орта на самого себя давало единицу (табл. 2).

Однако такое, казалось бы, незначительное изменение закона умножения приводит к катастрофическим последствиям и нарушает

Таблица 2. Правила умножения и коммутации ортов $\vec{\mathbf{h}}_1$, $\vec{\mathbf{h}}_2$, $\vec{\mathbf{h}}_3$

	$\vec{\mathbf{h}}_1$	$\vec{\mathbf{h}}_2$	$\vec{\mathbf{h}}_3$
$\vec{\mathbf{h}}_1$	1	$\vec{\mathbf{h}}_3$	$-\vec{\mathbf{h}}_2$
$\vec{\mathbf{h}}_2$	$-\vec{\mathbf{h}}_3$	1	$\vec{\mathbf{h}}_1$
$\vec{\mathbf{h}}_3$	$\vec{\mathbf{h}}_2$	$-\vec{\mathbf{h}}_1$	1

целостность алгебры. Действительно, например, согласно правилам умножения и коммутации табл. 2, имеем

$$\left(\vec{\mathbf{h}}_3\right)^2 = \vec{\mathbf{h}}_3\vec{\mathbf{h}}_3 = \vec{\mathbf{h}}_1\vec{\mathbf{h}}_2\vec{\mathbf{h}}_1\vec{\mathbf{h}}_2 = -\vec{\mathbf{h}}_1\vec{\mathbf{h}}_1\vec{\mathbf{h}}_2\vec{\mathbf{h}}_2 = -1, \tag{1.16}$$

что противоречит исходным правилам.

В качестве альтернативы кватернионам в конце 19 века Д. Гиббсом и О. Хевисайдом была создана векторная алгебра [22, 23]. В ней для записи векторных величин используется тройка ортогональных единичных векторов (ортов) $\vec{\mathbf{g}}_1$, $\vec{\mathbf{g}}_2$, $\vec{\mathbf{g}}_3$, образующих правый декартовый базис. Любая векторная величина $\vec{G}$ может быть представлена посредством разложения по этому векторному базису в виде

$$\vec{G} = G_1\vec{\mathbf{g}}_1 + G_2\vec{\mathbf{g}}_2 + G_3\vec{\mathbf{g}}_3 . \tag{1.17}$$

В векторной алгебре устанавливаются два типа умножения ортов – скалярное и векторное. Скалярное произведение ортов обозначается символом “$\cdot$” и подчиняется следующим правилам:

$$\begin{gathered}
\vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 = \left(\vec{\mathbf{g}}_1\right)^2 = 1, \\
\vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = \left(\vec{\mathbf{g}}_2\right)^2 = 1, \\
\vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \left(\vec{\mathbf{g}}_3\right)^2 = 1, \\
\vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = \vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 = 0, \\
\vec{\mathbf{g}}_1 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_1 = 0, \\
\vec{\mathbf{g}}_2 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_2 = 0 .
\end{gathered} \tag{1.18}$$

Векторное произведение ортов обозначается символом “$\times$” и имеет следующие свойства:

$$\begin{gathered}
\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_1 = 0, \\
\vec{\mathbf{g}}_2 \times \vec{\mathbf{g}}_2 = 0, \\
\vec{\mathbf{g}}_3 \times \vec{\mathbf{g}}_3 = 0, \\
\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_2 = -\vec{\mathbf{g}}_2 \times \vec{\mathbf{g}}_1 = \vec{\mathbf{g}}_3, \\
\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_3 = -\vec{\mathbf{g}}_3 \times \vec{\mathbf{g}}_1 = \vec{\mathbf{g}}_2, \\
\vec{\mathbf{g}}_2 \times \vec{\mathbf{g}}_3 = -\vec{\mathbf{g}}_3 \times \vec{\mathbf{g}}_2 = \vec{\mathbf{g}}_1 .
\end{gathered} \tag{1.19}$$

Принимая во внимание указанные свойства умножения ортов, можно записать по аналогии с (1.16):

$$\left(\vec{\mathbf{g}}_3\right)^2 = \vec{\mathbf{g}}_3 \cdot \vec{\mathbf{g}}_3 = \left(\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_2\right) \cdot \left(\vec{\mathbf{g}}_1 \times \vec{\mathbf{g}}_2\right) = 1\,, \tag{1.20}$$

и порядок умножения в этом выражении изменять нельзя! Таким образом, в данной алгебре векторы умножаются либо скалярно, либо векторно, при этом клиффордовское произведение векторов

$$\vec{G}_1\vec{G}_2 \neq \left(\vec{G}_1 \cdot \vec{G}_2\right) + \left[\vec{G}_1 \times \vec{G}_2\right] \tag{1.21}$$

невозможно. В силу своей простоты и наглядности векторная алгебра получила широкое распространение среди исследователей, и в настоящее время она преподается в высших учебных заведениях всего мира.

1.3. Кватернионы Макфарлейна

В 1900 г. А. Макфарлейн предложил альтернативную систему четырехкомпонентных чисел, названных им гиперболическими кватернионами [24]. Данная система вобрала в себя лучшие свойства кватернионов и векторной алгебры. Кватернион Макферлейна записывается следующим образом:

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = M_0 + M_1\mathbf{m_1} + M_2\mathbf{m_2} + M_3\mathbf{m_3}\,. \tag{1.22}$$

Базисные элементы $\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}, \mathbf{m_3}$ подчиняются правилам умножения, которые представлены в табл. 3. Здесь i – обычная мнимая единица ($i^2 = -1$). Существенным моментом является то, что квадраты единичных базисных элементов – положительно определенные величины.

Таблица 3. Правила умножения элементов $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3$

	$\mathbf{m}_1$	$\mathbf{m}_2$	$\mathbf{m}_3$
$\mathbf{m}_1$	1	$i\mathbf{m}_3$	$-i\mathbf{m}_2$
$\mathbf{m}_2$	$-i\mathbf{m}_3$	1	$i\mathbf{m}_1$
$\mathbf{m}_3$	$i\mathbf{m}_2$	$-i\mathbf{m}_1$	1

Таблица 4. Правила умножения и коммутации векторов $\vec{\mathbf{m}}_1, \vec{\mathbf{m}}_2, \vec{\mathbf{m}}_3$

	$\vec{\mathbf{m}}_1$	$\vec{\mathbf{m}}_2$	$\vec{\mathbf{m}}_3$
$\vec{\mathbf{m}}_1$	1	$i\vec{\mathbf{m}}_3$	$-i\vec{\mathbf{m}}_2$
$\vec{\mathbf{m}}_2$	$-i\vec{\mathbf{m}}_3$	1	$i\vec{\mathbf{m}}_1$
$\vec{\mathbf{m}}_3$	$i\mathbf{m}_2$	$-i\mathbf{m}_1$	1

Между базисными элементами кватернионов Гамильтона и Макфарлейна существует простая связь:

$$\mathbf{m_k} = i\mathbf{h_k} \quad (\mathbf{k} = 1,\ 2,\ 3). \tag{1.23}$$

Если придать элементам базиса свойства единичных векторов, то можно построить универсальную комбинированную скалярно-векторную алгебру. Рассмотрим правую тройку единичных векторов $\vec{\mathbf{m}}_1, \vec{\mathbf{m}}_2, \vec{\mathbf{m}}_3$. Потребуем для этих единичных векторов правила умножения, аналогичные правилам умножения элементов гиперболических кватернионов (табл. 4).

Тогда скалярно-векторный кватернион Макфарлейна можно представить в следующем виде:

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = M_0 + M_1\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{1} + M_2\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{2} + M_3\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{3}, \tag{1.24}$$

или в компактной форме

$$\widehat{\boldsymbol{M}} = M_0 + \vec{M}\ . \tag{1.25}$$

В алгебре Макфарлейна клиффордовское произведение двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равно

$$\vec{A}\vec{B} = \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) + i\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]. \tag{1.26}$$

Здесь использовано обозначение скалярного произведение двух векторов посредством символа “ $\cdot$ ” и круглых скобок:

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3, \tag{1.27}$$

и векторного произведения посредством символа “ $\times$ ” и квадратных скобок:

$$\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]=\left(A_2B_3-A_3B_2\right)\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{1}+\left(A_3B_1-A_1B_3\right)\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{2}+\left(A_1B_2-A_2B_1\right)\vec{\mathbf{m}}_\mathbf{3}\,. \quad (1.28)$$

Эта алгебра обладает всеми преимуществами как векторной алгебры, так и алгебры кватернионов. Она могла бы стать основным математическим аппаратом теоретической физики, но время было упущено, и векторная алгебра Гиббса–Хевисайда прочно заняла позиции математического инструмента для описания физических явлений.

1.4. Матрицы Паули

Несмотря на то что векторная алгебра успешно применяется для описания классических полей и кинематики классических частиц, этого математического аппарата оказалось не достаточно для описания квантовых явлений. Поэтому для описания спиновых свойств электрона в 1920 г. В. Паули предложил использовать двухкомпонентные волновые функции (спиноры) и матричные спиновые операторы [25]. Матрицы Паули имеют размерность 2×2 и записываются следующим образом:

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Обращает на себя внимание тот факт, что матрицы Паули образуют антикоммутативную алгебру, аналогичную алгебре кватернионов Макфарлейна. Правила умножения и коммутации матриц Паули имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&(\sigma_1)^2=(\sigma_2)^2=(\sigma_3)^2=\sigma_0\,,\\ &\sigma_1\sigma_2=-\sigma_2\sigma_1=i\sigma_3\,,\\ &\sigma_3\sigma_1=-\sigma_1\sigma_3=i\sigma_2\,,\\ &\sigma_2\sigma_3=-\sigma_3\sigma_2=i\sigma_1\,,\end{aligned} \quad (1.30)$$

где σ_0 – единичная матрица:

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

В дальнейшем для удобства мы будем вместо матрицы σ_0 использовать символ “1”. Правила умножения матриц Паули можно представить в виде таблицы (табл. 5).

Таблица 5. Правила умножения матриц Паули

	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	1	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
σ_2	$-i\sigma_3$	1	$i\sigma_1$
σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	1

Матрицы Паули образуют алгебру, с помощью которой можно компактно записать квантовое уравнение движения электрона в магнитном поле. Определим операторы импульса $\hat{\vec{p}}$ и векторного потенциала электромагнитного поля $\hat{\vec{A}}$ следующим образом:

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\sigma_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\sigma_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\sigma_3\right), \qquad (1.32)$$

$$\hat{\vec{A}} = A_1\sigma_1 + A_2\sigma_2 + A_3\sigma_3 . \qquad (1.33)$$

Выражения (1.32) и (1.33) формально напоминают разложение вектора по базису, где в качестве базисных элементов выступают матрицы σ_k. С помощью этих операторов можно записать аналог уравнения Паули:

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m_0}\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right)\left(\hat{\vec{p}} - \frac{e}{c}\hat{\vec{A}}\right) - e\varphi\right\}\psi . \qquad (1.34)$$

В этом уравнении m_0 – масса электрона, e – электрический заряд электрона, c – скорость света, φ – скалярный потенциал. Волновая функция ψ представляет собой двухкомпонентный спинор. Решение этого уравнения идентично решению уравнения Паули.

1.5. Матрицы Дирака

В 1928 г. П. Дирак предложил релятивистское уравнение для описания квантовых свойств электрона, основанное на четырехкомпонентных спинорных волновых функциях и матричных операторах [26, 27]. Для разложения квадратичной формы энергии-импульса им использовались две системы матриц (размерности 4×4) σ_k и ρ_k:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.36)$$

Тогда операторное выражение для соотношения Эйнштейна записывается в следующем виде:

$$\left(\rho_1\hat{E} + \rho_2 c\left(\sigma_1\hat{p}_x + \sigma_2\hat{p}_y + \sigma_3\hat{p}_3\right) + \rho_3 mc^2\right)\left(\rho_1\hat{E} + \rho_2 c\left(\sigma_1\hat{p}_x + \sigma_2\hat{p}_y + \sigma_3\hat{p}_3\right) + \rho_3 mc^2\right) = 0, \quad (1.37)$$

а уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле имеет вид

$$\left(\rho_1\left(\hat{E} - e\varphi\right) + \rho_2 c\left(\sigma_1\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c}A_x\right) + \sigma_2\left(\hat{p}_y - \frac{e}{c}A_y\right) + \sigma_3\left(\hat{p}_z - \frac{e}{c}A_z\right)\right) + \rho_3 mc^2\right)\boldsymbol{\psi} = 0. \quad (1.38)$$

Алгебра матриц σ_k и ρ_k сходна с алгеброй кватернионов Макфарлейна:

$$\begin{gathered} \sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = \sigma_3^{\ 2} = 1, \\ \sigma_1\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3, \\ \sigma_2\sigma_3 = -\sigma_3\sigma_2 = i\sigma_1, \\ \sigma_3\sigma_1 = -\sigma_1\sigma_3 = i\sigma_2, \end{gathered} \quad (1.39)$$

$$\begin{gathered} \rho_1^{\ 2} = \rho_2^{\ 2} = \rho_3^{\ 2} = 1, \\ \rho_1\rho_2 = -\rho_1\rho_2 = i\rho_3, \\ \rho_2\rho_3 = -\rho_3\rho_2 = i\rho_1, \\ \rho_3\rho_1 = -\rho_1\rho_3 = i\rho_2. \end{gathered} \quad (1.40)$$

1.6. Выводы

Таким образом, в данной главе мы рассмотрели некоторые основные некоммутативные алгебры, которые широко используются для описания физических систем. Особое внимание уделено алгебре кватернионов Макфарлейна, поскольку именно эта алгебра наиболее близка к алгебрам матриц Паули и Дирака, используемым для описания квантовых объектов. Особая привлекательность кватернионов Макфарлейна связана с тем, что на их основе также можно построить описание квантовых систем, но при этом сохранить достаточно прозрачную скалярно-векторную геометрическую интерпретацию физических величин.

Глава 2

Алгебра седеонов

2.1. Пространственно-временные седеоны

Обычно под пространственной и временной инверсией подразумевается замена координат и времени $x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$, $t \to -t$ в операторных частях уравнений и аргументах функций. При этом изменение или сохранение знака у скалярных и векторных величин диктуется априорными физическими соображениями. Предлагаемая нами алгебра седеонов учитывает пространственно-временные свойства скалярных и векторных величин в явном виде.

Алгебра седеонов [16] включает в себя четыре группы величин, отличающихся своими свойствами по отношению к операциям пространственно-временной инверсии.

- Абсолютные скаляры (V) и абсолютные векторы $(\vec{V})$ не изменяются при пространственной и временной инверсии.
- Временные скаляры $(V_{\mathbf{t}})$ и временные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{t}})$ изменяются (меняют знак) при временной инверсии, но не изменяются при пространственной инверсии.
- Пространственные скаляры $(V_{\mathbf{r}})$ и пространственные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{r}})$ изменяются при пространственной инверсии, но не изменяются при временной инверсии.
- Пространственно-временные скаляры $(V_{\mathbf{tr}})$ и пространственно-временные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{tr}})$ изменяются и при временной, и при пространственной инверсии.

Индексами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{r}$ мы обозначаем преобразования инверсии ($\mathbf{t}$ для временной инверсии и $\mathbf{r}$ для пространственной инверсии), которые изменяют соответствующие величины. Важной особенностью рассматриваемых преобразований является их локальность: если какая-либо величина является функцией координат и времени, то преобразование инверсии может изменить знак этой функции, но не затрагивает аргументы. Все указанные выше величины могут быть интегрированы в один пространственно-временной объект, который мы назовем “седеон” и будем обозначать заглавной буквой с волной, выделенной жирным шрифтом – $\tilde{\mathbf{V}}$. Пространственно-временной седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ определяется следующим выражением:

$$\tilde{\mathbf{V}} = V + \vec{V} + V_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + V_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + V_{\mathbf{tr}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} . \qquad (2.1)$$

Введем скалярно-векторный базис $\mathbf{a_0}$, $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, $\vec{\mathbf{a}}_3$, где элемент $\mathbf{a_0}$ представляет собой абсолютную скалярную единицу ($\mathbf{a_0} \equiv 1$), а элементы $\vec{\mathbf{a}}_1$, $\vec{\mathbf{a}}_2$, $\vec{\mathbf{a}}_3$ являются абсолютными векторами, образующими правую декартовую тройку. В дальнейшем мы будем обозначать единичные абсолютные векторы без стрелки как $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Также мы введем четыре пространственно-временные единицы $\mathbf{e_0}$, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, где $\mathbf{e_0}$ – абсолютная скалярная единица ($\mathbf{e_0} \equiv 1$); $\mathbf{e}_1$ – временная скалярная единица ($\mathbf{e_1} \equiv \mathbf{e_t}$); $\mathbf{e}_2$ – пространственная скалярная единица ($\mathbf{e_2} \equiv \mathbf{e_r}$); $\mathbf{e}_3$ – пространственно-временная скалярная единица ($\mathbf{e_3} \equiv \mathbf{e_{tr}}$). Используя пространственно-временной базис $\mathbf{e}_\alpha$ и скалярно-векторный базис $\mathbf{a}_\beta$ (греческие индексы $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$), можно ввести унифицированные седеонные компоненты $V_{\alpha\beta}$ в соответствии со следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
V &= \mathbf{e_0} V_{00} \mathbf{a_0} , \\
\vec{V} &= \mathbf{e_0} \left(V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3} \right), \\
V_{\mathbf{t}} &= \mathbf{e_1} V_{10} \mathbf{a_0} , \\
\vec{V}_{\mathbf{t}} &= \mathbf{e_1} \left(V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3} \right), \\
V_{\mathbf{r}} &= \mathbf{e_2} V_{20} \mathbf{a_0} , \\
\vec{V}_{\mathbf{r}} &= \mathbf{e_2} \left(V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3} \right), \\
V_{\mathbf{tr}} &= \mathbf{e_3} V_{30} \mathbf{a_0} , \\
\vec{V}_{\mathbf{tr}} &= \mathbf{e_3} \left(V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3} \right) .
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Тогда седеон (2.1) может быть представлен в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0} &\left(V_{00}\mathbf{a_0} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3} \right) + \\
+\mathbf{e_1} &\left(V_{10}\mathbf{a_0} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3} \right) + \\
+\mathbf{e_2} &\left(V_{20}\mathbf{a_0} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3} \right) + \\
+\mathbf{e_3} &\left(V_{30}\mathbf{a_0} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3} \right) .
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

Седеонные компоненты $V_{\alpha\beta}$ являются числами (в общем случае комплексными). В дальнейшем для упрощения записей мы будем опускать символы $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{e}_0$.

Важным свойством седеонов является то, что если два седеона равны между собой, то равны все их шестнадцать пространственно-временных скалярно-векторных компонент. Это позволяет записывать многие соотношения релятивистской физики в компактной форме.

Рассмотрим правила умножения базисных элементов $\mathbf{a}_\mathbf{n}$ и $\mathbf{e}_\mathbf{m}$ (латинские индексы **n**, **m** = 1, 2, 3). Потребуем, чтобы квадрат длины любого вектора был положительно определенной величиной. Тогда векторы $\mathbf{a}_\mathbf{n}$ должны удовлетворять следующим правилам:

$$\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{n} = \mathbf{a}_\mathbf{n}^2 = 1 , \tag{2.4}$$

$$\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{m} = -\,\mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{a}_\mathbf{n} \text{ (для } \mathbf{n} \neq \mathbf{m} \text{)}. \tag{2.5}$$

Кроме того, для существования клиффордовского произведения векторов необходимо потребовать, чтобы имело место следующее правило умножения базисных элементов $\mathbf{a}_\mathbf{n}$ (внешнее произведение):

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = i\mathbf{a}_3 , \quad \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = i\mathbf{a}_1 , \quad \mathbf{a}_3\mathbf{a}_1 = i\mathbf{a}_2 . \tag{2.6}$$

Здесь и далее величина i является мнимой единицей $(i^2 = -1)$. Аналогичные правила введем и для элементов пространственно-временного базиса $\mathbf{e}_\mathbf{m}$:

$$\mathbf{e}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{n} = \mathbf{e}_\mathbf{n}^2 = 1 , \tag{2.7}$$

$$\mathbf{e}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{m} = -\,\mathbf{e}_\mathbf{m}\mathbf{e}_\mathbf{n} \text{ (для } \mathbf{n} \neq \mathbf{m} \text{)}, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_3 , \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_1 , \quad \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = i\mathbf{e}_2 . \tag{2.9}$$

Правила умножения и коммутации для абсолютных единичных векторов $\mathbf{a}_\mathbf{n}$ и для пространственно-временных единиц $\mathbf{e}_\mathbf{m}$ могут быть представлены для наглядности в виде таблиц (табл. 6 и 7).

Заметим, что хотя седеонные пространственно-временные единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и единичные векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют антикоммутативные алгебры:

$$\mathbf{e}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{m} = -\mathbf{e}_\mathbf{m}\mathbf{e}_\mathbf{n} , \tag{2.10}$$

$$\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{a}_\mathbf{m} = -\mathbf{a}_\mathbf{m}\mathbf{a}_\mathbf{n} , \tag{2.11}$$

единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ коммутируют с векторами $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{a}_\mathbf{n}\mathbf{e}_\mathbf{m} = \mathbf{e}_\mathbf{m}\mathbf{a}_\mathbf{n} \tag{2.12}$$

для любых **n** и **m**.

Таблица 6. Правила умножения абсолютных единичных векторов

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	1	$i\mathbf{a}_3$	$-i\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_2$	$-i\mathbf{a}_3$	1	$i\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$	$i\mathbf{a}_2$	$-i\mathbf{a}_1$	1

Таблица 7. Правила умножения пространственно-временных единиц

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	1	$i\mathbf{e}_3$	$-i\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-i\mathbf{e}_3$	1	$i\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$i\mathbf{e}_2$	$-i\mathbf{e}_1$	1

Таким образом, седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ является сложным пространственно-временным объектом, представляющим собой сумму абсолютного скаляра, временного скаляра, пространственного скаляра, пространственно-временного скаляра, абсолютного вектора, временного вектора, пространственного вектора и пространственно-временного вектора.

Седеон может быть представлен в компактной форме. Определяя скалярно-векторные величины как

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{0} &= V_{00} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\,,\\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{1} &= V_{10} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\,,\\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{2} &= V_{20} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\,,\\
\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{3} &= V_{30} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\,,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

мы можем представить седеон (2.3) в следующей форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}_\mathbf{0} + \mathbf{e_1}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{1} + \mathbf{e_2}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{2} + \mathbf{e_3}\bar{\mathbf{V}}_\mathbf{3}\,. \tag{2.14}$$

С другой стороны, определяя пространственно-временные седеонные скаляры как

$$\begin{aligned}
\mathbf{V_0} &= V_{00} + \mathbf{e_1}V_{10} + \mathbf{e_2}V_{20} + \mathbf{e_3}V_{30}, \\
\mathbf{V_1} &= V_{01} + \mathbf{e_1}V_{11} + \mathbf{e_2}V_{21} + \mathbf{e_3}V_{31}, \\
\mathbf{V_2} &= V_{02} + \mathbf{e_1}V_{12} + \mathbf{e_2}V_{22} + \mathbf{e_3}V_{32}, \\
\mathbf{V_3} &= V_{03} + \mathbf{e_1}V_{13} + \mathbf{e_2}V_{23} + \mathbf{e_3}V_{33},
\end{aligned} \quad , \tag{2.15}$$

мы можем записать седеон (2.3) в другой форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V_0} + \mathbf{V_1 a_1} + \mathbf{V_2 a_2} + \mathbf{V_3 a_3}. \tag{2.16}$$

Также с помощью введения седеонного вектора

$$\vec{\mathbf{V}} = \vec{V} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} = \mathbf{V_1 a_1} + \mathbf{V_2 a_2} + \mathbf{V_3 a_3}, \tag{2.17}$$

седеон может быть представлен в следующем компактном виде:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V_0} + \vec{\mathbf{V}}. \tag{2.18}$$

Далее мы будем обозначать седеонные скаляры и седеонные векторы с помощью заглавных букв жирным шрифтом.

Рассмотрим правила седеонного умножения более детально. Произведение двух седеонов $\tilde{\mathbf{A}}$ и $\tilde{\mathbf{B}}$ может быть представлено в следующем виде:

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} = \left(\mathbf{A_0} + \vec{\mathbf{A}}\right)\left(\mathbf{B_0} + \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathbf{A_0 B_0} + \mathbf{A_0}\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}}\mathbf{B_0} + \left(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}\right) + i\left[\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right]. \tag{2.19}$$

Здесь мы ввели обозначение скалярного произведения двух седеонных векторов (внутреннее произведение) с помощью символа “$\cdot$” и круглых скобок:

$$\left(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}\right) = \mathbf{A_1 B_1} + \mathbf{A_2 B_2} + \mathbf{A_3 B_3}, \tag{2.20}$$

и седеонного векторного произведения (внешнее произведение) с помощью символа “$\times$” и квадратных скобок:

$$\left[\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}\right] = \left(\mathbf{A_2 B_3} - \mathbf{A_3 B_2}\right)\mathbf{a_1} + \left(\mathbf{A_3 B_1} - \mathbf{A_1 B_3}\right)\mathbf{a_2} + \left(\mathbf{A_1 B_2} - \mathbf{A_2 B_1}\right)\mathbf{a_3}. \tag{2.21}$$

В выражениях (2.20) и (2.21) умножение седеонных компонент производится в соответствии с (2.15) и табл. 7.

В частности, седеонное произведение двух абсолютных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равно

$$\vec{A}\vec{B} = \left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) + i\left[\vec{A} \times \vec{B}\right], \tag{2.22}$$

где скалярное произведение

$$\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3, \tag{2.23}$$

а векторное

$$\left[\vec{A}\times\vec{B}\right]=(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{a_1}+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{a_2}+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{a_3}. \tag{2.24}$$

Данное свойство широко используется нами в дальнейшем.

2.2. Вращение и пространственно-временное сопряжение

Поворот седеона $\tilde{\mathbf{V}}$ на угол θ вокруг оси, направленной вдоль единичного вектора $\vec{n}$, – это операция, при которой скалярные компоненты седеона не преобразуются, а направление векторных компонент изменяется на угол θ. При этом, подобно инверсии, преобразование поворота является локальным, т. е. не затрагивает координаты, от которых зависят компоненты седеона. Описанное преобразование поворота осуществляется с помощью седеона

$$\tilde{\mathbf{U}}=\cos\left(\theta/2\right)+i\,\vec{n}\sin\left(\theta/2\right) \tag{2.25}$$

и сопряженного седеона

$$\tilde{\mathbf{U}}^{*}=\cos\left(\theta/2\right)-i\,\vec{n}\sin\left(\theta/2\right). \tag{2.26}$$

Заметим, что справедливо соотношение

$$\tilde{\mathbf{U}}^{*}\tilde{\mathbf{U}}=\tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{U}}^{*}=1. \tag{2.27}$$

Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ определяется как седеонное произведение:

$$\tilde{\mathbf{V}}'=\tilde{\mathbf{U}}^{*}\tilde{\mathbf{V}}\tilde{\mathbf{U}}. \tag{2.28}$$

Таким образом, трансформированный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ выражается через компоненты исходного седеона следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}'&=\left(\cos\left(\theta/2\right)-i\,\vec{n}\sin\left(\theta/2\right)\right)\left(\mathbf{V_0}+\vec{\mathbf{V}}\right)\left(\cos\left(\theta/2\right)+i\,\vec{n}\sin\left(\theta/2\right)\right)=\\&=\mathbf{V_0}+\vec{\mathbf{V}}\cos\theta+\left(1-\cos\theta\right)\left(\vec{n}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right)\vec{n}+\sin\theta\left[\vec{n}\times\vec{\mathbf{V}}\right].\end{aligned} \tag{2.29}$$

Ясно видно, что преобразование вращения не изменяет седеонно-скалярную часть, в то время как седеонный вектор $\vec{\mathbf{V}}$ поворачивается на угол θ вокруг вектора $\vec{n}$. При этом если компоненты седеона зависят от пространственных координат, то при преобразовании (2.28) эти координаты не преобразуются.

Операции временного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{t}})$, пространственного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{r}})$ и пространственно-временного сопряжения $(\hat{R}_{\mathbf{tr}})$ связаны с преобразованиями в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_{\mathbf{t}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_2\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_2 = \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 - \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3, \\
\hat{R}_{\mathbf{r}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_1\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_1 = \bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 - \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3, \\
\hat{R}_{\mathbf{tr}}\tilde{\mathbf{V}} &= \mathbf{e}_3\tilde{\mathbf{V}}\mathbf{e}_3 = \bar{\mathbf{V}}_0 - \mathbf{e}_1\bar{\mathbf{V}}_1 - \mathbf{e}_2\bar{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{e}_3\bar{\mathbf{V}}_3.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

2.3. Подалгебры меньшей размерности

Седеонный базис $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{a}_\beta$ позволяет конструировать различные типы величин меньшей размерности, которые отличаются своими свойствами по отношению к операциям пространственного и временного сопряжения. Например, можно ввести пространственно-временные двойные числа вида

$$D_{\mathbf{t}} = d_{01} + \mathbf{e}_{\mathbf{t}} d_{11}, \tag{2.31}$$

$$D_{\mathbf{r}} = d_{02} + \mathbf{e}_{\mathbf{r}} d_{12}, \tag{2.32}$$

$$D_{\mathbf{tr}} = d_{03} + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}} d_{13}, \tag{2.33}$$

где $d_{\alpha\beta}$ – скалярные компоненты. Величины (2.31) – (2.33), с одной стороны, обладают всеми свойствами двойных чисел, а с другой стороны, по-разному преобразуются при пространственно-временном сопряжении и при седеонных преобразованиях Лоренца (см. раздел 3.1).

Также можно ввести четырехкомпонентные величины, которые мы назовем “кватероны” (в противоположность кватернионам), в соответствии со следующими определениями:

$$\widehat{Q} = q_{00}\mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_0\left(q_{01}\mathbf{a}_1 + q_{02}\mathbf{a}_2 + q_{03}\mathbf{a}_3\right), \tag{2.34}$$

$$\widehat{Q}_{\mathbf{t}} = q_{10}\mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(q_{11}\mathbf{a}_1 + q_{12}\mathbf{a}_2 + q_{13}\mathbf{a}_3\right), \tag{2.35}$$

$$\widehat{Q}_{\mathbf{r}} = q_{20}\mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(q_{21}\mathbf{a}_1 + q_{22}\mathbf{a}_2 + q_{23}\mathbf{a}_3\right), \tag{2.36}$$

$$\widehat{Q}_{\mathbf{tr}} = q_{30}\mathbf{a}_0 + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(q_{31}\mathbf{a}_1 + q_{32}\mathbf{a}_2 + q_{33}\mathbf{a}_3\right). \tag{2.37}$$

Абсолютный кватерон (2.34) представляет собой сумму абсолютного скаляра и абсолютного вектора. Он не изменяется под действием операций пространственно-временного сопряжения. Временной кватерон $\widehat{Q}_{\mathbf{t}}$, пространственный кватерон $\widehat{Q}_{\mathbf{r}}$ и пространственно-временной кватерон $\widehat{Q}_{\mathbf{tr}}$ изменяются под действием операций пространственно-временного сопряжения в соответствии с правилами коммутации базисных элементов $\mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_{tr}}$. Например, операция временного сопряжения (см. (2.30)) кватерона $\widehat{Q}_{\mathbf{t}}$ сводится к преобразованию следующего вида:

$$\hat{R}_{\mathbf{t}}\widehat{Q}_{\mathbf{t}} = \mathbf{e_r}\widehat{Q}_{\mathbf{t}}\mathbf{e_r} = q_0\mathbf{a_0} - \mathbf{e_t}\left(q_1\mathbf{a_1} + q_2\mathbf{a_2} + q_3\mathbf{a_3}\right). \tag{2.38}$$

Кроме того, седеонный базис $\mathbf{e}_\alpha$, $\mathbf{a}_\beta$ позволяет также конструировать различные типы пространственно-временных восьмикомпонентных величин – октонов [28]:

$$\breve{A}_{\mathbf{t}} = A_{00} + A_{01}\mathbf{a_1} + A_{02}\mathbf{a_2} + A_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_t}A_{10} + \mathbf{e_t}\left(A_{11}\mathbf{a_1} + A_{12}\mathbf{a_2} + A_{13}\mathbf{a_3}\right), \tag{2.39}$$

$$\breve{B}_{\mathbf{r}} = B_{00} + B_{01}\mathbf{a_1} + B_{02}\mathbf{a_2} + B_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_r}B_{20} + \mathbf{e_r}\left(B_{21}\mathbf{a_1} + B_{22}\mathbf{a_2} + B_{23}\mathbf{a_3}\right), \tag{2.40}$$

$$\breve{C}_{\mathbf{tr}} = C_{00} + C_{01}\mathbf{a_1} + C_{02}\mathbf{a_2} + C_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_{tr}}C_{30} + \mathbf{e_{tr}}\left(C_{31}\mathbf{a_1} + C_{32}\mathbf{a_2} + C_{33}\mathbf{a_3}\right). \tag{2.41}$$

Применение пространственных октонов (2.40) в электродинамике и релятивистской квантовой механике рассмотрено в работах [28–30]. Каждая из этих описанных выше подалгебр является замкнутой (кольцом) по отношению к операции клиффордовского умножения.

2.4. Выводы

Алгебра седеонов может рассматриваться как скалярно-векторный вариант алгебры Клиффорда со специфическими правилами умножения и коммутации. Седеонный векторный базис $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ отвечает за пространственные вращения, в то время как пространственно-временной базис $\mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_{tr}}$ – за преобразования пространственной и временной инверсии. При этом, с точки зрения правил умножения и коммутации, оба эти базиса эквивалентны.

В противоположность векторной алгебре Гиббса–Хевисайда, правила умножения единичных векторов седеонного векторного базиса содержат мнимую единицу (см. табл. 6). Это позволяет реализовать скалярно-векторную алгебру, на которой определено произведение Клиффорда. Первым, кто указал на возможность такого произведения единичных векторов, был А. Макфарлейн [24]. Позднее сходные правила умножения для матричного базиса использовали В. Паули [25] и П. Дирак [26] при построении спинорных уравнений квантовой механики.

Глава 3

Применение седеонов в релятивистской физике

3.1. Преобразования Лоренца

Релятивистский четырехмерный вектор события может быть представлен в следующей седеонной форме:

$$\tilde{\mathbf{S}} = i\mathbf{e_t}ct + \mathbf{e_r}\vec{r}\ , \tag{3.1}$$

где c – скорость света, t – абсолютный скаляр время и $\vec{r} = x\mathbf{a_1} + y\mathbf{a_2} + z\mathbf{a_3}$ – абсолютный радиус-вектор. Седеонный квадрат этой величины

$$\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}} = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{3.2}$$

является инвариантом преобразований Лоренца и представляет собой интервал события. В рамках седеонной алгебры преобразования величин при переходе от одной инерциальной системы координат к другой осуществляются с помощью седеонов

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}} &= \cosh\vartheta - \mathbf{e_{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta, \\ \tilde{\mathbf{L}}^* &= \cosh\vartheta + \mathbf{e_{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\tanh(2\vartheta) = v/c$; v – скорость равномерного движения системы вдоль абсолютного вектора $\vec{m}$. Заметим, что

$$\tilde{\mathbf{L}}^*\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^* = 1\,. \tag{3.4}$$

Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{S}}'$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}' = \tilde{\mathbf{L}}^*\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{L}} &= \left(\cosh\vartheta + \mathbf{e_{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right)\left(i\mathbf{e_t}ct + \mathbf{e_r}\vec{r}\right)\left(\cosh\vartheta - \mathbf{e_{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right) = \\ &= i\mathbf{e_t}ct\cosh(2\vartheta) - i\mathbf{e_t}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\sinh(2\vartheta) + \mathbf{e_r}\vec{r} - \\ &- \mathbf{e_r}ct\,\vec{m}\sinh(2\vartheta) + \mathbf{e_r}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Разделяя величины с $\mathbf{e_t}$ и $\mathbf{e_r}$, получаем хорошо известные выражения для преобразований времени и координат [31]:

$$t' = \frac{t - xv/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ,\ \ x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\ ,\ \ y' = y\ ,\ \ z' = z\ , \tag{3.6}$$

где x – координата вдоль направления вектора $\vec{m}$.

Рассмотрим преобразования Лоренца для полного седеона $\tilde{\mathbf{V}}$. Преобразованный седеон $\tilde{\mathbf{V}}'$ записывается как седеонное произведение

$$\tilde{\mathbf{V}}' = \tilde{\mathbf{L}}^* \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{L}}. \tag{3.7}$$

В развернутой форме:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}' &= \left(\cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right)\left(\mathbf{V}_{\mathbf{0}} + \vec{\mathbf{V}}\right)\left(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\right) \\ &= \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\cosh^2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^2\vartheta \\ &\quad + \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}} - \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\cosh\vartheta\sinh\vartheta + \vec{\mathbf{V}}\cosh^2\vartheta \\ &\quad - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\vec{\mathbf{V}}\vec{m}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^2\vartheta + \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}\vec{m}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Переписывая выражение (3.8) с помощью скалярного (2.20) и векторного (2.21) произведений, получаем

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}}' &= \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\cosh^2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^2\vartheta \\ &+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{V}_{\mathbf{0}} - \mathbf{V}_{\mathbf{0}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\cosh\vartheta\sinh\vartheta + \vec{\mathbf{V}}\cosh^2\vartheta \\ &+ \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{\mathbf{V}}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh^2\vartheta - 2\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right)\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh^2\vartheta \\ &+ \left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{\mathbf{V}}\right) - \left(\vec{\mathbf{V}}\cdot\vec{m}\right)\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta \\ &+ i\left(\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{\mathbf{V}}\right] - \left[\vec{\mathbf{V}}\times\vec{m}\right]\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\right)\cosh\vartheta\sinh\vartheta.\end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, преобразованный седеон имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}&V' = V, \\ &V'_{\mathbf{tr}} = V_{\mathbf{tr}}, \\ &V'_{\mathbf{r}} = V_{\mathbf{r}}\cosh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\sinh(2\vartheta), \\ &V'_{\mathbf{t}} = V_{\mathbf{t}}\cosh(2\vartheta) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\sinh(2\vartheta), \\ &\vec{V}' = \vec{V}\cosh(2\vartheta) - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right) + \\ &\qquad + i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right]\sinh(2\vartheta), \\ &\vec{V}'_{\mathbf{tr}} = \vec{V}_{\mathbf{tr}}\cosh(2\vartheta) - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right) + \\ &\qquad + i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}\right]\sinh(2\vartheta), \\ &\vec{V}'_{\mathbf{r}} = \vec{V}_{\mathbf{r}} + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{t}}\vec{m}\sinh(2\vartheta), \\ &\vec{V}'_{\mathbf{t}} = \vec{V}_{\mathbf{t}} + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\vec{m}\left(\cosh 2\vartheta - 1\right) + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{r}}\vec{m}\sinh(2\vartheta).\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2. Энергия, импульс и момент импульса

В релятивистской физике важной величиной является четырехмерный вектор энергии-импульса частицы. В седеонной алгебре он может быть представлен в виде седеона:

$$\tilde{\mathbf{E}} = i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p}\,, \tag{3.11}$$

где E – энергия, а $\vec{p}$ – импульс частицы. Квадрат этой величины

$$\left(i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p}\right)\left(i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p}\right) = -E^2 + c^2\vec{p}^{\,2} \tag{3.12}$$

является инвариантом преобразований Лоренца и связан с массой частицы m_0 соотношением Эйнштейна:

$$E^2 - c^2\vec{p}^{\,2} - m_0^2c^4 = 0\,. \tag{3.13}$$

Используя алгебру седеонов, данное выражение можно представить в виде произведения двух сомножителей:

$$\left(i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + \mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right)\left(i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + \mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right) = 0\,, \tag{3.14}$$

что в дальнейшем будет использовано нами при конструировании уравнений квантовой механики и теории поля.

Обобщенный момент импульса частицы $\tilde{\mathbf{M}}$ может быть записан следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \frac{1}{c}\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{S}} = \frac{1}{c}\left(i\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p}\right)\left(i\mathbf{e_t}ct + \mathbf{e_r}\vec{r}\right). \tag{3.15}$$

Производя седеонное умножение, получаем

$$\tilde{\mathbf{M}} = -Et + \left(\vec{p}\cdot\vec{r}\right) + i\left[\vec{p}\times\vec{r}\right] + \mathbf{e_{tr}}c\vec{p}t - \mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}E\vec{r}\,. \tag{3.16}$$

3.3. Обобщенное седеонное волновое уравнение

Волновая функция свободной релятивистской квантовой частицы должна удовлетворять волновому уравнению, которое получается из соотношения Эйнштейна для энергии и импульса

$$E^2 - c^2p^2 - m_0^2c^4 = 0 \tag{3.17}$$

посредством замены классической энергии E и импульса $\vec{p}$ на соответствующие квантово-механические операторы [27]:

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \vec{\nabla}, \tag{3.18}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, а $\vec{\nabla}$ – оператор градиента, который является абсолютным вектором и имеет следующий вид:

$$\vec{\nabla} = \mathbf{a}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_3 \frac{\partial}{\partial z}. \tag{3.19}$$

В седеонной алгебре соотношение Эйнштейна (3.17) для операторов (3.18) может быть представлено следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t} \hat{E} + \mathbf{e}_\mathbf{r} c\hat{\vec{p}} + \mathbf{e}_\mathbf{tr} m_0 c^2 \right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t} \hat{E} + \mathbf{e}_\mathbf{r} c\hat{\vec{p}} + \mathbf{e}_\mathbf{tr} m_0 c^2 \right) = 0. \tag{3.20}$$

Рассмотрим волновую функцию в виде пространственно-временного седеона

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t) = \boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}(\vec{r},t) + \vec{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t), \tag{3.21}$$

тогда обобщенное седеонное волновое уравнение, соответствующее операторному уравнению (3.20), может быть записано в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r} \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_\mathbf{tr} \frac{m_0 c}{\hbar} \right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r} \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_\mathbf{tr} \frac{m_0 c}{\hbar} \right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \tag{3.22}$$

В этом уравнении m_0 является массой покоя частицы.

Кроме того, существует специальный класс частиц, который описывается волновым уравнением первого порядка [26, 27]:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r} \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_\mathbf{tr} \frac{m_0 c}{\hbar} \right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \tag{3.23}$$

Очевидно, для таких частиц уравнение (3.22) удовлетворяется автоматически.

3.4. Седеонное волновое уравнение в теории поля

Обобщенное седеонное волновое уравнение (3.22) имеет и другую интерпретацию как волновое уравнение для силовых полей [16]. В этом случае соотношение Эйнштейна (3.17) играет роль дисперсионного соотношения для энергии и импульса кванта поля:

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2} = 0, \tag{3.24}$$

где ω – частота, k – модуль волнового вектора, m_0 – массы кванта поля. Источниками полей являются соответствующие заряды и токи, так что кроме однородного уравнения, описывающего свободные поля, имеет место неоднородное уравнение вида

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}} \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}} , \qquad (3.25)$$

где посредством $\tilde{\mathbf{J}}$ обозначен феноменологический скалярно-векторный источник поля. В этом случае волновая функция $\tilde{\mathbf{W}}$ имеет смысл потенциала поля. Разумеется, что в случае массы кванта, равной нулю, уравнение (3.25) должно описывать электромагнитное поле. Седеонные уравнения силовых полей с нулевой и ненулевой массой кванта будут рассмотрены подробно в последующих разделах.

3.5. Выводы

Таким образом, в данном разделе показано, что седеонная алгебра позволяет факторизовать квадратичную форму, соответствующую соотношению Эйнштейна для энергии и импульса, и написать волновые уравнения для релятивистской квантовой частицы и для силовых полей. При этом пространственно-временной базис $\mathbf{e}_{\mathbf{t}}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$, $\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}$ является математической структурой, которая обеспечивает корректные преобразования Лоренца для скалярно-векторных волновых функций.

Глава 4

Уравнения электромагнитного поля

4.1. Седеонная форма уравнений электродинамики

Седеонное волновое уравнение для электромагнитного поля в вакууме записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_t \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_r\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_t \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_r\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}}\ . \tag{4.1}$$

Потенциал электромагнитного поля имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_t\varphi + \mathbf{e}_r\vec{A}, \tag{4.2}$$

где φ – скалярный потенциал (временная компонента), $\vec{A}$ – векторный потенциал (пространственная компонента). Источник поля $\tilde{\mathbf{J}}$ имеет следующий вид:

$$\tilde{\mathbf{J}} = -4\pi i\mathbf{e}_t\rho - \mathbf{e}_r\frac{4\pi}{c}\vec{j}, \tag{4.3}$$

где ρ – объемная плотность электрического заряда, $\vec{j}$ – объемная плотность электрического тока.

Уравнение (4.1) является компактным универсальным соотношением и может быть представлено либо в виде системы волновых уравнений для потенциалов поля, либо в виде системы уравнений Максвелла для напряженностей поля. Действительно, производя перемножения операторов в уравнении (4.1) и разделяя скалярную временную и векторную пространственную части, получаем систему волновых уравнений:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi = 4\pi\rho\ , \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}\ . \tag{4.5}$$

Здесь предполагается, что потенциалы поля описываются дважды дифференцируемыми функциями, так что $\left[\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\right]\tilde{\mathbf{W}} = 0$. С другой стороны, выполняя последовательное действие операторов в уравнении (4.1), получаем

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}\right)=$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{\nabla}\varphi-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]. \qquad (4.6)$$

Введем скалярные и векторные напряженности электромагнитного поля:

$$f=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right),$$

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \qquad (4.7)$$

$$\vec{H}=\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right].$$

Тогда выражение (4.6) представляется в виде

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}\right)=-f+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}-i\vec{H}\ , \qquad (4.8)$$

а уравнение (4.1) может быть переписано следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(-f+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}-i\vec{H}\right)=-4\pi i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\rho-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (4.9)$$

Применяя оператор

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)$$

к обеим частям уравнения (4.9) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)f=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)\right\}, \qquad (4.10)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}=-4\pi\vec{\nabla}\rho-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}, \qquad (4.11)$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}\right]. \qquad (4.12)$$

Если выполняется закон сохранения электрического заряда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{j}\right) = 0, \tag{4.13}$$

то уравнение (4.10) не имеет источников, и можно выбрать скалярное поле f равным нулю. Это эквивалентно выполнению условия калибровки Лоренца:

$$f = \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 0. \tag{4.14}$$

В калибровке Лоренца уравнение (4.9) принимает вид

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E} - i\vec{H}\right) = -4\pi i\mathbf{e_t}\rho - \mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \tag{4.15}$$

Производя действие оператора в левой части (4.15), имеем следующее седеонное уравнение:

$$\begin{gathered}\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - i\mathbf{e_t}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) + \mathbf{e_t}\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] + \\ + \mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + i\mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) - \mathbf{e_r}\left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] = \\ = -4\pi i\mathbf{e_t}\rho - \mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\ ..\end{gathered} \tag{4.16}$$

Разделяя в (4.16) величины с различными свойствами, получаем систему уравнений первого порядка

$$\begin{gathered}\left[\vec{\nabla} \times \vec{E}\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \left[\vec{\nabla} \times \vec{H}\right] = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}\right) = 4\pi\rho, \\ \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}\right) = 0,\end{gathered} \tag{4.17}$$

которая совпадает с системой уравнений Максвелла.

4.2. Энергия и импульс электромагнитного поля

Седеонная алгебра позволяет одновременно проводить комбинированные вычисления с величинами различного типа. В данном разделе, используя седеонную алгебру, мы получим соотношения для энергии и импульса электромагнитного поля.

Умножая слева обе части уравнения (4.15) на седеон ($\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}-i\vec{H}$), имеем:

$$
\begin{aligned}
&-i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}\right)^2+\left(\vec{H}\right)^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right)\right\}+\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{i\frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-i\frac{1}{c}\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+i\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)+i\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)\right\}+\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\frac{1}{c}\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]+\right.\\
&\left.+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right]+\left[\vec{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]\right\}+\\
&+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]-\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}\right)^2+\left(\vec{H}\right)^2\right\}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)\vec{H}\right\}=\\
&=i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)+i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{H}\cdot\vec{j}\right)-4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left\{\rho\vec{H}+\frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\vec{j}\right]\right\}+\\
&+4\pi\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left\{\rho\vec{E}-\frac{1}{c}\left[\vec{H}\times\vec{j}\right]\right\}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Заметим, что в этом выражении и далее оператор $\vec{\nabla}$ действует на все выражение справа. Так, например, для любых двух векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ имеем:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}\,. \tag{4.19}$$

Разделяя в (4.18) величины различных типов, получаем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)+\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right)+\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)=0\,, \tag{4.20}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left(\vec{E}^2+\vec{H}^2\right)+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]-\\
&-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{E}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)\vec{H}\right\}+\rho\vec{E}-\left[\vec{H}\times\vec{j}\right]=0,
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\right\}+$$

$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)+\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)\right\}-\left(\vec{H}\cdot\vec{j}\right)=0, \qquad (4.22)$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]\right\}+\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\right\}+$$

$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]-\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right]\right\}+c\vec{H}\rho+\left[\vec{E}\times\vec{j}\right]=0. \qquad (4.23)$$

Выражение (4.20) представляет собой известное соотношение, называемое теоремой Пойнтинга. Величина

$$w=\frac{\vec{E}^2+\vec{H}^2}{8\pi} \qquad (4.24)$$

является объемной плотностью энергии электромагнитного поля, а вектор

$$\vec{P}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] \qquad (4.25)$$

имеет смысл плотности потока энергии поля (вектор Пойнтинга).

4.3. Соотношения для инвариантов электромагнитного поля

Используя седеонную алгебру, нетрудно получить соотношения для величин

$$\begin{aligned} I_1 &= \vec{E}^2-\vec{H}^2, \\ I_2 &= \left(\vec{E}\cdot\vec{H}\right), \end{aligned} \qquad (4.26)$$

которые являются инвариантами преобразований Лоренца для электромагнитного поля. Умножая слева обе части уравнения (4.15) на седеон ($\mathbf{e_{tr}}\vec{E}+i\vec{H}$), имеем:

$$-i\mathbf{e_t}\left\{\frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)-\frac{1}{c}\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)-\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)-\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)\right\}+$$
$$+i\mathbf{e_r}\left\{\frac{1}{c}\left(\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)+\frac{1}{c}\left(\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)+\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)-\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)\right\}+$$
$$+\mathbf{e_t}\left\{\frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]-\frac{1}{c}\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]+\right.$$
$$\left.+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)+\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right]-\left[\vec{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]\right\}+$$
$$+\mathbf{e_r}\left\{-\frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]-\frac{1}{c}\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]+\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\right.$$
$$\left.-\left[\vec{E}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right]+\left[\vec{H}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right]\right\}=$$
$$=i\mathbf{e_t}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)-i\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\left(\vec{H}\cdot\vec{j}\right)+4\pi\mathbf{e_t}\left\{\rho\vec{H}-\frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\vec{j}\right]\right\}+$$
$$+4\pi\mathbf{e_r}\left\{\rho\vec{E}+\frac{1}{c}\left[\vec{H}\times\vec{j}\right]\right\}. \tag{4.27}$$

Разделяя величины различных типов, получаем следующие соотношения для инвариантов Лоренца электромагнитного поля:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}^2-\vec{H}^2\right\}=$$
$$=-\left(\vec{E}\cdot\vec{j}\right)+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)+\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)\right\}, \tag{4.28}$$

$$\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}^2-\vec{H}^2\right\}=$$
$$=\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}-\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}\right\}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]\right\}-c\rho\vec{E}-\left[\vec{H}\times\vec{j}\right], \tag{4.29}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}\cdot\vec{H}\right)\right\}=$$
$$=-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right)-\left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right)\right\}-\left(\vec{H}\cdot\vec{j}\right), \tag{4.30}$$

$$\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}\cdot\vec{H}\right)\right\}=$$
$$=\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)+\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)-\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}+\left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}\right\}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}\times\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right]\right\}-c\vec{H}\rho-\left[\vec{E}\times\vec{j}\right]. \qquad (4.31)$$

4.4. Симметричная форма уравнений электромагнитного поля

Впервые вопрос о симметрии между электрическими и магнитными зарядами был рассмотрен П. Дираком [32, 33]. С учетом гипотетических магнитных зарядов (магнитных монополей) и соответствующих токов, система уравнений Максвелла выглядит абсолютно симметричной [34]. В терминах седеонной алгебры симметричное волновое уравнение для электромагнитного поля можно записать в следующем виде:

$$\left(i\mathbf{e}_1\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_1\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}=\tilde{\mathbf{J}}\,. \qquad (4.32)$$

Здесь седеонный потенциал $\tilde{\mathbf{W}}$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{W}}= i\mathbf{e}_1\varphi_e-i\mathbf{e}_2\varphi_m+\mathbf{e}_1\vec{A}_m+\mathbf{e}_2\vec{A}_e, \qquad (4.33)$$

где φ_e – электрический скалярный потенциал, φ_m – магнитный скалярный потенциал, $\vec{A}_e$ – электрический векторный потенциал, $\vec{A}_m$ – магнитный векторный потенциал. Седеонный источник

$$\tilde{\mathbf{J}}=-i\mathbf{e}_1 4\pi\rho_e-\mathbf{e}_2\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e+i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_m-\mathbf{e}_1\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m, \qquad (4.34)$$

где ρ_e – объемная плотность электрического заряда, $\vec{j}_e$ – объемная плотность электрического тока, ρ_m – объемная плотность магнитного заряда, $\vec{j}_m$ – объемная плотность магнитного тока.

Уравнение (4.32) эквивалентно восьми скалярным уравнениям для компонент потенциалов. Разделяя в (4.32) пространственно-временные и скалярно-векторные части, получаем волновые уравнения для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_e = 4\pi\rho_e\,, \tag{4.35}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_e = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_e\,, \tag{4.36}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_m = 4\pi\rho_m\,, \tag{4.37}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_m = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m\,. \tag{4.38}$$

Вводя скалярные и векторные напряженности поля согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}
e &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right),\\
h &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_m\right),\\
\vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi_e-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_m\right],\\
\vec{H} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_m}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi_m+\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right],
\end{aligned} \tag{4.39}$$

мы получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_1}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_2}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_1}\varphi_e-i\mathbf{e_2}\varphi_m+\mathbf{e_1}\vec{A}_m+\mathbf{e_2}\vec{A}_e\right)=\\
&=-e+i\mathbf{e_3}h-i\vec{H}+\mathbf{e_3}\vec{E},
\end{aligned} \tag{4.40}$$

и волновое уравнение (4.32) сводится к

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_1}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_2}\vec{\nabla}\right)\left(-e+i\mathbf{e_3}h-i\vec{H}+\mathbf{e_3}\vec{E}\right)=\\
&=-i\mathbf{e_1}4\pi\rho_e-\mathbf{e_2}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e+i\mathbf{e_2}4\pi\rho_m-\mathbf{e_1}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем систему уравнений для полей, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\rho_e,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial h}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=4\pi\rho_m,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}+\vec{\nabla}e-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}+\vec{\nabla}h+\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m.
\end{aligned}
\tag{4.42}
$$

Уравнения (4.42) представляют собой замкнутую систему восьми скалярных уравнений для восьми компонент электромагнитного поля.

Скалярные и векторные напряженности поля (4.39) и уравнения (4.42) обладают калибровочной инвариантностью по отношению к градиентным преобразованиям следующего вида:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_e \Rightarrow \varphi_e+\frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t},\\
&\vec{A}_e \Rightarrow \vec{A}_e+\vec{\nabla}\varepsilon_e,\\
&\varphi_m \Rightarrow \varphi_m+\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial t},\\
&\vec{A}_m \Rightarrow \vec{A}_m+\vec{\nabla}\varepsilon_m,
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

где ε_e и ε_m – произвольные дважды дифференцируемые скалярные функции координат и времени, удовлетворяющие однородному волновому уравнению. Действительно, нетрудно проверить, что преобразования (4.43) не изменяют напряженности полей (4.39), и уравнений (4.42).

Применяя оператор

$$
\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)
$$

к обеим частям уравнения (4.41) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)e=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial \rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)\right\},\tag{4.44}
$$

$$
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)h=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial \rho_m}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m\right)\right\},\tag{4.45}
$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}=-4\pi\vec{\nabla}\rho_e-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_e}{\partial t}-\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_m\right], \tag{4.46}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}=-4\pi\vec{\nabla}\rho_m-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_m}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_e\right]. \tag{4.47}$$

Если в физической системе выполняются законы сохранения электрического и магнитного зарядов

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)=0, \tag{4.48}$$

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m\right)=0, \tag{4.49}$$

то уравнения (4.44) и (4.45) не имеют источников, и можно выбрать скалярные поля e и h равными нулю. Это эквивалентно выполнению условий калибровки Лоренца для электрического и магнитного потенциалов:

$$e=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e)=0, \tag{4.50}$$

$$h=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_m}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_m)=0. \tag{4.51}$$

В калибровке Лоренца уравнения Максвелла (4.42) записываются следующим образом:

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\rho_e, \tag{4.52}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e, \tag{4.53}$$

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=4\pi\rho_m, \tag{4.54}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_m. \tag{4.55}$$

Поскольку экспериментально установлено, что магнитные заряды и токи не наблюдаются, то для описания явлений в наших условиях необходимо положить

$$\begin{aligned}\rho_m&=0,\\ \vec{j}_m&=0.\end{aligned} \tag{4.56}$$

Это приводит к тому, что уравнения (4.37) и (4.38) не имеют источников и можно выбрать магнитные потенциалы φ_m и $\vec{A}_m$ равными нулю. Кроме того, зануляются источники в правых частях уравнений (4.54) и (4.55). Таким образом, в частном случае отсутствия магнитных зарядов и выполнения закона сохранения электрического заряда мы приходим к стандартной системе уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=4\pi\rho_e,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=0.
\end{aligned}\tag{4.57}$$

4.5. Выводы

Таким образом, математическая структура седеонов позволяет сформулировать обобщенное седеонное волновое уравнение для электромагнитного поля, из которого следуют как волновые уравнения для потенциалов и напряженностей поля, так и система уравнений Максвелла. При этом все известные соотношения для энергии и импульса поля (теорема Пойнтинга) а также для инвариантов Лоренца получаются посредством простого клиффордовского умножения операторов и скалярно-векторных потенциалов поля. Данный подход может быть применен и для формулировки уравнений для поля с массой кванта, не равной нулю.

Глава 5

Уравнения слабого гравитационного поля

Аналогия между электромагнитным и гравитационным полем обсуждается на протяжении долгих лет, начиная с Д. Максвелла и О. Хевисайда [35,36]. Были предприняты многочисленные попытки обобщить теорию тяготения И. Ньютона и представить уравнения гравитационного поля в виде уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла. В основе данного подхода лежат два предположения. Первое является гипотезой существования гравитомагнитного поля, обусловленного движущимися массами. Второе предположение – гипотеза о том, что гравитационное взаимодействие распространяется в пространстве со скоростью, равной скорости света. Эти два предположения позволяют построить феноменологические уравнения для гравитационного поля, аналогичные уравнениям Максвелла [37, 38]. С другой стороны, недавно было показано, что линеаризация уравнений общей теории относительности вблизи плоской метрики Минковского также приводит к уравнениям Максвелла для слабых гравитационных полей.

Применение гиперкомплексных чисел в теории слабого гравитационного поля рассмотрено в работах [39, 40].

5.1. Линейные уравнения гравитационного поля в плоском пространстве-времени

Как известно, уравнение Эйнштейна, описывающее гравитационное поле, записывается в следующем виде [31]:

$$R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R=\frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}\,, \tag{5.1}$$

где $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор, $R_{\alpha\beta}$ – тензор Риччи, G – гравитационная постоянная, $T_{\alpha\beta}$ – тензор энергии-импульса материи. Для слабого поля в линейном приближении это уравнение можно представить [41–43] в следующей форме:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\bar{h}_{\alpha\beta}=-\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}\,, \tag{5.2}$$

где $\bar{h}_{\alpha\beta}$ – отклонение от метрического тензора Минковского $\eta_{\alpha\beta}$, определяемое соотношениями:

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta},$$
$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta} h, \tag{5.3}$$
$$h \equiv \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}.$$

Отклонение $\bar{h}_{\alpha\beta}$ ($\left|\bar{h}_{\alpha\beta}\right| << 1$) удовлетворяет условию калибровки $\partial\bar{h}_{\alpha\beta} / \partial x_\beta = 0$. Введем плотность вещества ρ_G и плотность потока вещества $\vec{j}_G$, следуя соотношениям

$$T_{00} = \rho_G c^2\,, \tag{5.4}$$
$$T_{0n} = j_{Gn} c\,, \tag{5.5}$$

а также скалярный и векторный потенциалы согласно

$$\bar{h}_{00} = \frac{4}{c^2}\varphi_G\,, \tag{5.6}$$

$$\bar{h}_{0n} = \frac{4}{c^2}A_{Gn}\,. \tag{5.7}$$

Тогда уравнение (5.2) может быть представлено как система волновых уравнений для потенциалов поля:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi_G = -4\pi G \rho_G\,, \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}_G = -\frac{4\pi}{c} G\, \vec{j}_G\,, \tag{5.9}$$

с калибровочным условием

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi_G}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_G\right) = 0\,. \tag{5.10}$$

Аналогия с электродинамикой здесь вполне очевидна. Можно определить напряженности гравитационного поля:

$$\vec{E}_G = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi_G\,, \tag{5.11}$$

$$\vec{H}_G = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_G\right]. \tag{5.12}$$

Для этих величин справедливы уравнения, аналогичные уравнениям Максвелла. В векторной алгебре Гиббса–Хевисайда эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_G\right) = -4\pi G\rho_G,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_G\right) = 0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_G\right] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_G}{\partial t},\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_G\right] = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_G}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_G.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Уравнения гравитационного поля отличаются от уравнений для электромагнитного поля (4.17) знаком перед членами, описывающими источники поля. Эти же уравнения можно записать в алгебре седеонов.

5.2. Обобщенный закон Ньютона – Кулона

Известно, что сила кулоновского взаимодействия между двумя точечными электрически заряженными телами равна

$$\vec{F}_{e12} = \frac{q_{e1}q_{e2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}, \tag{5.14}$$

где q_{e1} и q_{e2} – электрические заряды; $\vec{r}_{12}$ – вектор, направленный от тела 1 к телу 2; r_{12} – расстояние между точечными телами, которое равно модулю вектора $\vec{r}_{12}$. Для симметричного описания электрического и гравитационного взаимодействий введем гравитационный заряд q_g, рассмотренный ранее в работах [37, 44]:

$$q_g = \sqrt{G}m, \tag{5.15}$$

где G – гравитационная постоянная, m – масса гравитирующего тела. Тогда соотношение Ньютона для силы гравитационного взаимодействия между двумя точечными телами может быть представлено в следующем виде:

$$\vec{F}_{g12} = -\frac{q_{g1}q_{g2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}. \tag{5.16}$$

Совместное рассмотрение гравитационного и электрического полей приводит к еще одной симметрии, связанной с зарядовым сопряжением. С алгебраической точки зрения, данную симметрию можно учесть, вводя дополнительные скалярные единицы, ассоциируемые с электрическим и гравитационным зарядами. Обозначим электрическую единицу символом $\boldsymbol{\varepsilon}_e$. Данная величина меняет знак при электрическом зарядовом сопряжении. Гравитационная единица $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ меняет знак при гравитационном зарядовом сопряжении. Кроме того, гравитоэлектрическая единица $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$ изменяет знак и при электрическом, и при гравитационном зарядовом сопряжении. Правила умножения единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$ выберем аналогичными правилам умножения элементов пространственно-временного базиса. Квадраты этих элементов равны единице:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_g^2 = \boldsymbol{\varepsilon}_{eg}^2 = 1. \tag{5.17}$$

Также будем предполагать антикоммутативность данных единиц:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_e \boldsymbol{\varepsilon}_g &= -\boldsymbol{\varepsilon}_g \boldsymbol{\varepsilon}_e, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_e \boldsymbol{\varepsilon}_{eg} &= -\boldsymbol{\varepsilon}_{eg} \boldsymbol{\varepsilon}_e, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{eg} \boldsymbol{\varepsilon}_g &= -\boldsymbol{\varepsilon}_g \boldsymbol{\varepsilon}_{eg}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Правила умножения и коммутации единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$ могут быть представлены в компактной форме в виде табл. 8.

Следуя этому подходу, можно ввести обобщенный заряд

$$Q = \boldsymbol{\varepsilon}_e q_e - i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g . \tag{5.19}$$

Тогда обобщенный закон Ньютона–Кулона может быть записан в следующем виде:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12} . \tag{5.20}$$

Таблица 8. Правила умножения единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, $\boldsymbol{\varepsilon}_g$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$

	$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	$\boldsymbol{\varepsilon}_g$	$\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$
$\boldsymbol{\varepsilon}_e$	1	$i\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$	$-i\boldsymbol{\varepsilon}_g$
$\boldsymbol{\varepsilon}_g$	$-i\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$	1	$i\boldsymbol{\varepsilon}_e$
$\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$	$i\boldsymbol{\varepsilon}_g$	$-i\boldsymbol{\varepsilon}_e$	1

Действительно, подставляя (5.19) в (5.20) и выделяя части, не зависящие от единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, мы получаем правильное выражение для силы взаимодействия между двумя точечными массивными электрически заряженными телами:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_{e1}q_{e2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} - \frac{q_{g1}q_{g2}}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} . \tag{5.21}$$

Основываясь на алгебре единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_g$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$, операции электрического зарядового сопряжения ($\hat{I}_e$), гравитационного зарядового сопряжения ($\hat{I}_g$) и электрогравитационного зарядового сопряжения ($\hat{I}_{eg}$), используемые в физике, могут быть определены следующим образом:

$$\hat{I}_e Q = \boldsymbol{\varepsilon}_g Q \boldsymbol{\varepsilon}_g = -\boldsymbol{\varepsilon}_e q_e - i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g , \tag{5.22}$$

$$\hat{I}_g Q = \boldsymbol{\varepsilon}_e Q \boldsymbol{\varepsilon}_e = \boldsymbol{\varepsilon}_e q_e + i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g , \tag{5.23}$$

$$\hat{I}_{eg} Q = \boldsymbol{\varepsilon}_{eg} Q \boldsymbol{\varepsilon}_{eg} = -\boldsymbol{\varepsilon}_e q_e + i\boldsymbol{\varepsilon}_g q_g . \tag{5.24}$$

5.3. Совместное описание электромагнитного и гравитационного полей

Седеонный подход в совокупности с алгеброй единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_g$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{eg}$ позволяет включить электромагнитное и гравитационное поле в единую математическую структуру. Рассмотрим потенциал поля в виде

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e}_\mathbf{t}\boldsymbol{\varepsilon}_e\varphi_e + \mathbf{e}_\mathbf{r}\boldsymbol{\varepsilon}_e\vec{A}_e + i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\boldsymbol{\varepsilon}_g\varphi_g + \mathbf{e}_\mathbf{r}\boldsymbol{\varepsilon}_g\vec{A}_g\right), \tag{5.25}$$

где $\varphi_e, \vec{A}_e, \varphi_g, \vec{A}_g$ – скалярные и векторные потенциалы электромагнитного (индекс e) и гравитационного (индекс g) полей. Далее мы будем подразумевать, что электрические величины содержат электрическую единицу $\boldsymbol{\varepsilon}_e$, а гравитационные величины содержат $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, однако для упрощения записей будем опускать их во всех получаемых выражениях, различая величины по индексу.

Обобщенное седеонное уравнение для электромагнитного и гравитационного полей записывается следующим образом:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{J}} . \tag{5.26}$$

Источник поля имеет вид

$$\tilde{\mathbf{J}} = -4\pi\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_e + \mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right) + 4\pi i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_g + \mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right), \tag{5.27}$$

где ρ_e – объемная плотность электрического заряда, $\vec{j}_e$ – объемная плотность электрического тока, ρ_g – объемная плотность гравитационного заряда, $\vec{j}_g$ – объемная плотность гравитационного тока. В развернутом виде уравнение (5.13) имеет вид

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_e + \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_e + i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_g + \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_g\right)\right) =$$

$$= -4\pi\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_e + \mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right) + 4\pi i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_g + \mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right). \tag{5.28}$$

Это уравнение одновременно описывает электромагнитные и гравитационные поля. Так, перемножая операторы в левой части уравнения (5.28) и разделяя величины с различными пространственно-временными и зарядовыми (с различными единицами $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$) свойствами, мы получаем систему волновых уравнений для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi_e = 4\pi\rho_e\,, \tag{5.29}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}_e = 4\pi\frac{1}{c}\vec{j}_e\,, \tag{5.30}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\varphi_g = -4\pi\rho_g\,, \tag{5.31}$$

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}_g = -4\pi\frac{1}{c}\vec{j}_g\,. \tag{5.32}$$

С другой стороны, уравнение (5.28) может быть представлено в виде системы уравнений первого порядка для напряженностей поля. Рассмотрим последовательное действие операторов в уравнении (5.28). После действия первого оператора мы получаем:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_e+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_g+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_g\right)\right)=$$

$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{\nabla}\varphi_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]+$$

$$+i\left\{-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{\nabla}\varphi_g-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right\}. \qquad (5.33)$$

Это выражение позволяет ввести скалярные и векторные напряженности полей согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}
f_e &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right),\\
\vec{E}_e &= -\vec{\nabla}\varphi_e-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t},\\
\vec{H}_e &= \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right],\\
f_g &= \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right),\\
\vec{E}_g &= -\vec{\nabla}\varphi_g-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t},\\
\vec{H}_g &= \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right].
\end{aligned} \qquad (5.34)$$

Используя определения (5.34), выражение (5.33) может быть переписано в виде

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_e+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi_g+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}_g\right)\right)=$$

$$=-f_e+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(-f_g+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right). \qquad (5.35)$$

Тогда обобщенное волновое уравнение (5.28) принимает следующий вид:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(-f_e+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(-f_g+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right)\right)=$$

$$=-4\pi\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_e+\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right)+4\pi i\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\rho_g+\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right). \qquad (5.36)$$

Применяя оператор $\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)$ к обеим частям уравнения (5.36), получаем волновые уравнения для напряженностей полей:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)f_e=\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)\right\}, \tag{5.37}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}_e=-4\pi\vec{\nabla}\rho_e-\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_e}{\partial t}, \tag{5.38}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}_e=\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_e\right], \tag{5.39}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)f_g=-\frac{4\pi}{c}\left\{\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_g\right)\right\}, \tag{5.40}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{E}_g=4\pi\vec{\nabla}\rho_g+\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial\vec{j}_g}{\partial t}, \tag{5.41}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{H}_g=-\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_g\right]. \tag{5.42}$$

Подразумевая сохранение электрического и гравитационного зарядов

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_e\right)=0, \tag{5.43}$$

$$\frac{\partial\rho_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_g\right)=0, \tag{5.44}$$

мы можем принять скалярные поля f_e и f_g равными нулю. Это эквивалентно следующим условиям калибровки Лоренца (см. выражения (5.34)):

$$f_e=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e)=0, \tag{5.45}$$

$$f_g=\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}+(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g)=0. \tag{5.46}$$

В калибровке Лоренца выражение (5.35) заменяется на

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_e+\mathbf{e_r}\vec{A}_e+i\left(i\mathbf{e_t}\varphi_g+\mathbf{e_r}\vec{A}_g\right)\right)=$$
$$=\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right), \tag{5.47}$$

и обобщенное уравнение (5.28) принимает вид

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right)\right)=$$
$$=-4\pi\left(i\mathbf{e_t}\rho_e+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_e\right)+4\pi i\left(i\mathbf{e_t}\rho_g+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right). \quad (5.48)$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (5.48) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем систему уравнений Максвелла следующего вида:

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right),\\
&\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]=\frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right),\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)=4\pi\left(\rho_e-i\rho_g\right),\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)=0.
\end{aligned} \quad (5.49)$$

После разделения величин с различными зарядовыми свойствами (с различными $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_\mathbf{g}$) получаются две отдельные системы уравнений для электромагнитного и гравитационного полей. Для электромагнитного поля имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t},\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_e+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t},\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)=4\pi\rho_e,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)=0.
\end{aligned} \quad (5.50)$$

Для гравитационного поля получаем

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t},\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_g+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t},\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)=-4\pi\rho_g,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)=0.
\end{aligned} \quad (5.51)$$

Таким образом, мы показали, что обобщенное уравнение (5.28) корректно описывает слабое гравитационное и электромагнитное поле.

5.4. Энергия и импульс поля

Седеонная алгебра позволяет производить комбинированные вычисления одновременно с электромагнитным и гравитационным полями. Умножая уравнение (5.48) на седеон $\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)$ слева, мы имеем следующее уравнение:

$$\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right) =$$
$$= -4\pi\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e - i\vec{H}_e + i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g - i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e_t}\rho_e + \mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_e - i\left(i\mathbf{e_t}\rho_g + \mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right)\right). \quad (5.52)$$

Производя седеонное умножение в (5.52), получаем следующее выражение:

$$-i\mathbf{e_t}\left\{\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)^2 + \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)^2\right\} + \left(\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\} +$$
$$+\mathbf{e_r}\left\{i\frac{1}{c}\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right) - i\frac{1}{c}\left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right) +\right.$$
$$\left. + i\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right) + i\left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\} +$$
$$+\mathbf{e_t}\left\{\frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right] + \frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right] +\right.$$
$$+\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right) - \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right) -$$
$$\left. -\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right]\right] + \left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\} -$$
$$-\mathbf{e_r}\left\{\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right] + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)^2 + \left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)^2\right\} +\right.$$
$$\left. +\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\right)\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right) + \left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right)\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\right\} =$$
$$= i\mathbf{e_t}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right) + i\mathbf{e_r}\frac{4\pi}{c}\left(\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right) -$$
$$-4\pi\mathbf{e_t}\left\{\left(\rho_e - i\rho_g\right)\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right) + \frac{1}{c}\left[\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right]\right\} +$$
$$+4\pi\mathbf{e_r}\left\{\left(\rho_e - i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e + i\vec{E}_g\right) - \frac{1}{c}\left[\left(\vec{H}_e + i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e - i\vec{j}_g\right)\right]\right\}. \quad (5.53)$$

Заметим еще раз, что в данном выражении и далее оператор $\vec{\nabla}$ действует на все выражение справа. Например, для любых векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ справедливо соотношение

$$\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)\vec{B}=\vec{B}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{B}. \tag{5.54}$$

Разделяя в (5.53) компоненты с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующие выражения:

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)^2+\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)^2\right\}+\frac{c}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)+$$
$$+\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right)=0, \tag{5.55}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)-\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)+\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}-$$
$$-\left(\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right)=0, \tag{5.56}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]+\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)-\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]-\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\}+$$
$$+c\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\left(\rho_e-i\rho_g\right)+\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right]=0, \tag{5.57}$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]+\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)^2+\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)^2\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)+\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right\}+$$
$$+c\left(\rho_e-i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)+\left[\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\,\vec{j}_g\right)\right]=0. \tag{5.58}$$

Наконец, выделяя величины, не зависящие от единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, получаем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}+\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{j}_g\right)\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]\right)-\left(\vec{\nabla}\cdot\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right)\right\}=0, \qquad (5.59)$$

$$\frac{1}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}+\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right\}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)\vec{E}_e+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)\vec{H}_e\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)\vec{E}_g+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)\vec{H}_g\right\}+$$
$$+\left\{\rho_e\vec{E}_e+\rho_g\vec{E}_g\right\}-\left\{\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]+\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0, \qquad (5.60)$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right)\right\}+\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\vec{H}_g\cdot\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right)-\left(\vec{E}_g\cdot\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right)\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)\right\}-\left\{\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\vec{j}_g\right)\right\}=0, \qquad (5.61)$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{H}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right]-\left[\vec{E}_e\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right]\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_g\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right]-\left[\vec{H}_g\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right]\right\}+$$
$$+c\left\{\vec{H}_e\rho_e+\vec{H}_g\rho_g\right\}+\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]+\left[\vec{E}_g\times\vec{j}_g\right]=0. \qquad (5.62)$$

Выражение (5.59) является обобщенной теоремой Пойнтинга. Величина

$$w=\frac{1}{8\pi}\left\{\vec{E}_e^2+\vec{H}_e^2-\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\} \qquad (5.63)$$

представляет собой объемную плотность энергии, в то время как вектор

$$\vec{P}=\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{H}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{H}_g\right]\right\} \tag{5.64}$$

играет роль вектора Пойнтинга. Кроме того, вектор

$$\vec{f}_L=\rho_e\vec{E}_e-\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]+\rho_g\vec{E}_g-\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right] \tag{5.65}$$

представляет собой объемную плотность обобщенной силы Лоренца.

5.5. Инварианты Лоренца

Седеонная алгебра позволяет получить соотношения для совместных инвариантов Лоренца гравитационного и электромагнитного полей. Для этого умножим уравнение (5.48) слева на седеон

$$\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right).$$

В результате получаем

$$\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_r\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e-i\vec{H}_e+i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g-i\vec{H}_g\right)\right)=$$

$$=-4\pi\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_e+i\vec{H}_e-i\left(\mathbf{e_{tr}}\vec{E}_g+i\vec{H}_g\right)\right)\left(i\mathbf{e_t}\rho_e+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_e-i\left(i\mathbf{e_t}\rho_g+\mathbf{e_r}\frac{1}{c}\vec{j}_g\right)\right). \tag{5.66}$$

Выполняя седеонное умножение и разделяя компоненты с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем следующие соотношения для напряженностей поля:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)-\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)\right\}-$$

$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)+\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)\right\}+$$

$$+\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right)=0, \tag{5.67}$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right)+\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right)-\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right)\right\}+$$

$$+\left(\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\cdot\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right)=0, \tag{5.68}$$

$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]+\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)+\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)\right\}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]-\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]\right\}-$$
$$-c\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\left(\rho_e-i\rho_g\right)+\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]=0, \qquad (5.69)$$

$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)}{\partial t}\right]+\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\frac{\partial\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)}{\partial t}\right]\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right)-\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\left(\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right)\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left[\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}_e+i\vec{E}_g\right)\right]\right]-\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{H}_e+i\vec{H}_g\right)\right]\right]\right\}-$$
$$-c\left(\rho_e-i\rho_g\right)\left(\vec{E}_e-i\vec{E}_g\right)+\left[\left(\vec{H}_e-i\vec{H}_g\right)\times\left(\vec{j}_e-i\vec{j}_g\right)\right]=0. \qquad (5.70)$$

Наконец, выделяя компоненты, не зависящие от единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{e}}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{g}}$, получаем

$$\frac{1}{8\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2+\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)+\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)+\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)\right\}+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{j}_e\right)-\left(\vec{E}_g\cdot\vec{j}_g\right)=0, \qquad (5.71)$$

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{H}_g\right)\right\}+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_e\right]\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_e\right]\right)\right\}+$$
$$+\frac{c}{4\pi}\left\{\left(\vec{E}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_g\right]\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_g\right]\right)\right\}+\left(\vec{H}_e\cdot\vec{j}_e\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\vec{j}_g\right)=0, \qquad (5.72)$$

$$\frac{c}{8\pi}\vec{\nabla}\left\{\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2+\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2\right\}+c\left\{\rho_e\vec{E}_e-\rho_g\vec{E}_g\right\}+\left\{\left[\vec{H}_e\times\vec{j}_e\right]-\left[\vec{H}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e+\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_g-\right.$$
$$\left.-\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)-\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e-\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)-\left(\vec{H}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_g\right\}=0, \qquad (5.73)$$

$$\frac{c}{4\pi}\vec{\nabla}\left\{\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{H}_g\right)\right\}-$$
$$-\frac{c}{4\pi}\left\{\vec{E}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_e\right)+\vec{E}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_g\right)+\vec{H}_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_e\right)+\vec{H}_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_g\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\vec{E}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_e+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{H}_g+\left(\vec{H}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_e+\left(\vec{H}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_g\right\}-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\left\{\left[\vec{E}_e\times\frac{\partial\vec{E}_e}{\partial t}\right]+\left[\vec{E}_g\times\frac{\partial\vec{E}_g}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_e\times\frac{\partial\vec{H}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{H}_g\times\frac{\partial\vec{H}_g}{\partial t}\right]\right\}+$$
$$+c\left\{\vec{H}_e\rho_e-\vec{H}_g\rho_g\right\}+\left\{\left[\vec{E}_e\times\vec{j}_e\right]-\left[\vec{E}_g\times\vec{j}_g\right]\right\}=0. \qquad (5.74)$$

Выражения (5.71) – (5.74) являются уравнениями для обобщенных инвариантов Лоренца I_1 и I_2:

$$I_1=\vec{E}_e^2-\vec{H}_e^2+\vec{E}_g^2-\vec{H}_g^2, \qquad (5.75)$$

$$I_2=\left(\vec{E}_e\cdot\vec{H}_e\right)+\left(\vec{E}_g\cdot\vec{H}_g\right). \qquad (5.76)$$

5.6. Выводы

Таким образом, алгебра седеонов позволяет построить описание электромагнитного и слабого гравитационного полей в рамках единой математической структуры. При этом, поскольку гравитационное поле входит в уравнения в виде мнимой части седеонной волновой функции (полевых потенциалов), то в итоге получаются правильные соотношения для энергии и вектора Пойнтинга гравитационной части поля. С физической точки зрения, совместное описание этих полей оправдано тем, что эффекты электромагнитного и гравитационного взаимодействий всегда проявляются совместно, поскольку гравитационные и электрические заряды не существуют по отдельности.

Глава 6

Уравнение первого порядка для полей с массой кванта, равной нулю

6.1. Седеонное волновое уравнение первого порядка

Среди решений седеонного однородного волнового уравнения второго порядка (5.26) есть особый класс, удовлетворяющий седеонному уравнению первого порядка следующего вида [18]:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\nu=0\,. \tag{6.1}$$

Рассмотрим потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\nu$ в виде

$$\tilde{\mathbf{W}}_\nu=i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\,, \tag{6.2}$$

где φ_ν и $\vec{A}_\nu$ – комплексные скалярный и векторный потенциалы поля:

$$\varphi_\nu=\varphi_e+i\varphi_g\,, \tag{6.3}$$

$$\vec{A}_\nu=\vec{A}_e+i\vec{A}_g\,. \tag{6.4}$$

Таким образом, уравнение (6.1) может быть представлено в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)=0\,. \tag{6.5}$$

Действуя оператором

$$i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}$$

на уравнение (6.5), имеем

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\left(i\mathbf{e}_\mathrm{t}\varphi_\nu+\mathbf{e}_\mathrm{r}\vec{A}_\nu\right)=0\,. \tag{6.6}$$

Отсюда, разделяя величины с различными пространственно-временными и зарядовыми свойствами, мы получаем волновые уравнения для потенциалов:

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_e=0, \tag{6.7}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\varphi_g=0, \tag{6.8}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_e=0, \tag{6.9}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\vec{A}_g=0. \tag{6.10}$$

Это показывает, что потенциалы поля φ_e, φ_g, $\vec{A}_e$, $\vec{A}_g$ удовлетворяют таким же волновым уравнения второго порядка, что и потенциалы гравитационного и электромагнитного поля, однако уравнение (6.5) выделяет только те решения, у которых напряженности электрического (гравитоэлектрического) и магнитного (гравитомагнитного) полей равны нулю. Действительно, производя седеонное умножение в уравнении (6.5), имеем

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_v}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_v}{\partial t}-\mathbf{e_{tr}}\vec{\nabla}\varphi_v-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_v\right)-i\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_v\right]=0. \tag{6.11}$$

Разделяя в (6.11) величины с различными пространственно-временными и зарядовыми свойствами, мы получаем следующую систему уравнений для потенциалов поля:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}+\vec{\nabla}\varphi_e=0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)=0,\\
&\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}+\vec{\nabla}\varphi_g=0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]=0.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Таким образом, можно предполагать, что уравнение (6.5) описывает специфическое поле, у которого потенциалы φ_e и $\vec{A}_e$ описывают электромагнитную компоненту, а потенциалы φ_g и $\vec{A}_g$ – гравитационную компоненту поля.

6.2. Соотношения для потенциалов поля

Умножая уравнение (6.5) на потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\nu$ слева, имеем следующее седеонное уравнение:

$$\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu + \mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu + \mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right) = 0. \qquad (6.13)$$

Производя в нем умножение и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы приходим к соотношениям для потенциалов поля, описываемого волновым уравнением первого порядка:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu^2 + \vec{A}_\nu^2\right\} + \left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_\nu\vec{A}_\nu\right) = 0, \qquad (6.14)$$

$$\left(\vec{A}_\nu\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]\right) = 0\,, \qquad (6.15)$$

$$\frac{1}{c}\left[\vec{A}_\nu\times\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}\right] + \left[\varphi_\nu\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right] + \left[\vec{A}_\nu\times\vec{\nabla}\varphi_\nu\right] = 0\,, \qquad (6.16)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu\vec{A}_\nu\right\} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_\nu^2 - \vec{A}_\nu^2\right\} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)\vec{A}_\nu = 0. \qquad (6.17)$$

Раскрывая скобки и выделяя члены, не зависящие от единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, получаем следующие четыре соотношения:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e^2 + \vec{A}_e^2 - \varphi_g^2 - \vec{A}_g^2\right\} + \left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_e\vec{A}_e\right) - \left(\vec{\nabla}\cdot\varphi_g\vec{A}_g\right) = 0, \qquad (6.18)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_e^2 - \vec{A}_e^2 - \varphi_g^2 + \vec{A}_g^2\right\} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e\vec{A}_e - \varphi_g\vec{A}_g\right\} +$$
$$+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)\vec{A}_e - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)\vec{A}_g = 0, \qquad (6.19)$$

$$\left(\vec{A}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]\right) - \left(\vec{A}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right) = 0, \qquad (6.20)$$

$$\frac{1}{c}\left\{\left[\vec{A}_e\times\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{A}_g\times\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right]\right\}+$$

$$+\left[\varphi_e\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]-\left[\varphi_g\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]+\left[\vec{A}_e\times\vec{\nabla}\varphi_e\right]-\left[\vec{A}_g\times\vec{\nabla}\varphi_g\right]=0. \qquad (6.21)$$

С другой стороны, умножая уравнение (6.5) на $\left(-i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)$ слева, мы получаем другое седеонное уравнение:

$$\left(-i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\varphi_\nu+\mathbf{e_r}\vec{A}_\nu\right)=0. \qquad (6.22)$$

После умножения и разделения величин с различными пространственно-временными свойствами выражение (6.22) приводится к системе четырех уравнений:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_\nu^2-\vec{A}_\nu^2\right\}+\varphi_\nu\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)-\left(\vec{A}_\nu\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_\nu=0, \qquad (6.23)$$

$$\left(\vec{A}_\nu\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_\nu\right]\right)=0, \qquad (6.24)$$

$$\frac{1}{c}\left[\vec{A}_\nu\times\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}\right]-\left[\vec{\nabla}\times\varphi_\nu\vec{A}_\nu\right]=0, \qquad (6.25)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_\nu^2+\vec{A}_\nu^2\right\}+\frac{1}{c}\left\{\varphi_\nu\frac{\partial\vec{A}_\nu}{\partial t}-\vec{A}_\nu\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial t}\right\}-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_\nu\right)\vec{A}_\nu=0. \qquad (6.26)$$

Раскрывая скобки и выделяя члены, не зависящие от единиц $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_g$, получаем следующие четыре соотношения:

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varphi_e^2-\vec{A}_e^2-\varphi_g^2+\vec{A}_g^2\right\}+$$

$$+\varphi_e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)+\varphi_g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)-\left(\vec{A}_e\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_e-\left(\vec{A}_g\cdot\vec{\nabla}\right)\varphi_g=0, \qquad (6.27)$$

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}\left\{\varphi_e^2+\vec{A}_e^2-\varphi_g^2-\vec{A}_g^2\right\}+$$

$$+\frac{1}{c}\left\{\varphi_e\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}-\vec{A}_e\frac{\partial\varphi_e}{\partial t}+\vec{A}_g\frac{\partial\varphi_g}{\partial t}-\varphi_g\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right\}-$$

$$-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_e\right)\vec{A}_e-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_g\right)\vec{A}_g=0, \qquad (6.28)$$

$$\left(\vec{A}_e\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_e\right]\right)-\left(\vec{A}_g\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_g\right]\right)=0, \qquad (6.29)$$

$$\frac{1}{c}\left\{\left[\vec{A}_e\times\frac{\partial\vec{A}_e}{\partial t}\right]-\left[\vec{A}_g\times\frac{\partial\vec{A}_g}{\partial t}\right]\right\}-\left[\vec{\nabla}\times\varphi_e\vec{A}_e\right]+\left[\vec{\nabla}\times\varphi_g\vec{A}_g\right]=0. \qquad (6.30)$$

Выражения (6.18), (6.19), (6.27) и (6.28) являются аналогами теоремы Пойнтинга и уравнений на инварианты Лоренца для поля, описываемого волновым уравнением первого порядка.

6.3. Решение в виде плоской волны

Волновое уравнение первого порядка

$$\left(i\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\nu=0 \qquad (6.31)$$

имеет решение в виде плоской волны:

$$\tilde{\mathbf{W}}_\nu=\tilde{\mathbf{U}}_\nu\exp\left\{-i\omega t+i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}. \qquad (6.32)$$

Дисперсионное соотношение для такой волны имеет вид

$$\omega_\pm=\pm ck, \qquad (6.33)$$

где k – модуль волнового вектора $\vec{k}$. В общем случае решение уравнения (6.31) может быть записано в виде плоской волны следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{W}}_\nu=\left(\mathbf{e_1}\frac{\omega_\pm}{c}-i\mathbf{e_2}\vec{k}\right)\tilde{\mathbf{M}}_\nu\exp\left\{-i\omega_\pm t+i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}, \qquad (6.34)$$

где $\tilde{\mathbf{M}}_\nu$ – произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени.

Проанализируем это решение. Предположим, что волновой вектор $\vec{k}$ направлен вдоль оси Z. Тогда уравнение (6.31) записывается следующим образом:

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3}\frac{\partial}{\partial z}\right)\tilde{\mathbf{W}}'_\nu=0, \qquad (6.35)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}'_\nu=i\mathbf{e_t}\tilde{\mathbf{W}}_\nu$. Его решение представляется в виде двух волн:

$$\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+}=-\left(1+\mathbf{e_{tr}}\mathbf{a_3}\right)k\tilde{\mathbf{M}}_\nu\exp\left\{-i\omega_+ t+i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}, \qquad (6.36)$$

$$\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-} = \left(1-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{a}_{\mathbf{3}}\right)k\tilde{\mathbf{M}}_{\nu}\,\exp\left\{-i\omega_{-}t+i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right\}. \qquad (6.37)$$

Заметим, что $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+}$ соответствует положительной ветви дисперсионного соотношения (6.33), в то время как $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-}$ соответствует отрицательной ветви данного дисперсионного соотношения. Кроме того, как видно, решения (6.36) и (6.37) являются собственными функциями оператора

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2}\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\mathbf{a}_{\mathbf{3}}. \qquad (6.38)$$

Действительно, можно проверить, что $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{S}_z\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu} = S_z\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu}, \qquad (6.39)$$

где собственные значения $S_z = \pm 1/2$. Таким образом, волна $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu+}$ отвечает собственному значению $S_z = +1/2$, в то время как волна $\tilde{\mathbf{W}}'_{\nu-}$ отвечает собственному значению $S_z = -1/2$.

6.4. Поле скалярного источника

Рассмотрим неоднородное волновое уравнение вида

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_{\nu} = \tilde{\mathbf{I}}_{\nu}, \qquad (6.40)$$

где $\tilde{\mathbf{I}}_{\nu}$ – феноменологический источник. Выберем источник так, чтобы он содержал только скалярную компоненту

$$\tilde{\mathbf{I}}_{\nu} = -4\pi\sigma_{\nu}, \qquad (6.41)$$

где σ_{ν} является плотностью заряда и имеет две компоненты:

$$\sigma_{\nu} = \sigma_{\nu e} + i\sigma_{\nu g}. \qquad (6.42)$$

Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_{\nu}$ в виде (6.2)

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\nu} = i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi_{\nu} + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}_{\nu}, \qquad (6.43)$$

получаем уравнение поля в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi_{\nu}+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}_{\nu}\right) = 4\pi\sigma_{\nu}. \qquad (6.44)$$

Отсюда следует, что отлична от нуля только напряженность скалярного поля f_v:

$$f_v = 4\pi\sigma_v \,. \tag{6.45}$$

Для точечного источника плотность заряда равна

$$\sigma_v = q_v \delta(\vec{r}) \,, \tag{6.46}$$

где q_v – точечный заряд:

$$q_v = q_{ve} + i q_{vg} \,. \tag{6.47}$$

Энергия взаимодействия двух точечных зарядов может быть представлена следующим образом:

$$W_{v1v2} = \frac{1}{4\pi} \int f_{v1} f_{v2} dV \,. \tag{6.48}$$

Подставляя сюда (6.45) и (6.46), получаем

$$W_{v1v2} = 4\pi \left(q_{ve1} q_{ve2} - q_{vg1} q_{vg2} \right) \delta(\vec{R}) \,, \tag{6.49}$$

где $\vec{R}$ – это вектор, соединяющий заряды. Из данного выражения видно, что заряды взаимодействуют, только находясь в одной и той же точке пространства.

6.5. Выводы

Таким образом, в данной главе мы рассмотрели поле с массой кванта равной нулю, описываемое волновым уравнением первого прядка, на основе пространственно-временной алгебры седеонов. Получены соотношения второго порядка для потенциалов поля, аналогичные соотношениям для энергии и инвариантов Лоренца гравитационного и электромагнитного полей. Получено выражение для энергии взаимодействия точечных зарядов – источников поля. Приведено решение однородного волнового уравнения первого порядка в виде плоской волны.

Глава 7

Седеонные уравнения полей с массой кванта, не равной нулю

Попытки обобщения волнового уравнения второго порядка для полей с массой кванта, не равной нулю, на основе различных систем гиперкомплексных чисел были предприняты в работах [15, 46–49]. Авторы обсуждали возможность конструирования полевых уравнений, сходных с уравнениями электродинамики, но для массивного “фотона”. В частности, были сделаны попытки представить волновое уравнение в виде системы уравнений первого порядка, аналогичных уравнениям Максвелла. Однако получаемые так называемые уравнения Прока–Максвелла содержат как потенциалы, так и напряженности полей [15, 49], т. е. переход к другим переменным выполнен не полностью. С другой стороны, есть ряд исследований, посвященных обобщению волнового уравнения Дирака на основе гиперкомплексных чисел [30, 50–53]. При таком подходе волновая функция имеет скалярно-векторную структуру, и гиперкомплексное уравнение Дирака может быть переформулировано так же, как волновое уравнение для потенциалов силового поля.

Рассмотрение многокомпонентных волновых функций является неизбежной необходимостью при описании спиновых и пространственно-временных свойств полей и релятивистских квантовых систем. С другой стороны, последовательный релятивистский подход требует равноправного рассмотрения пространственных и временных свойств физических величин, поэтому требования релятивистской инвариантности приводят нас к шестнадцатикомпонентным алгебрам, учитывающим симметрию по отношению к операциям пространственной и временной инверсии. Существуют несколько подходов при развитии теории на основе шестнадцатикомпонентных структур. Один из них связан с применением седенионов Кэли–Диксона [4, 54, 55]. Однако существенным недостатком этих величин является их неассоциативность. Другой подход основан на применении гиперкомплексных многокомпонентных векторов, образующих ассоциативные алгебры [14]. Основная идея таких векторов – это введение дополнительного единичного вектора, ортогонального пространственным ортам. Однако применение этих величин в квантовой механике и теории поля рассматривается в основном как одна из возможных абстрактных алгебраических схем для переформулировки уравнений Клейна–Гордона и Дирака, но не затрагивает физическую сущность этих уравнений.

В данной главе мы рассматриваем поля с массивным квантом, описываемые волновыми уравнениями первого и второго порядка на основе седеонных потенциалов и пространственно-временных операторов.

7.1. Уравнение для поля с массой кванта, не равной нулю

Рассмотрим однородное седеонное волновое уравнение (3.25) для свободного поля с массой кванта, не равной нулю:

$$\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0, \qquad (7.1)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}$ – седеонный потенциал, m_0 – масса кванта поля. Введем для удобства новые операторы:

$$\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad m = \frac{m_0 c}{\hbar}. \qquad (7.2)$$

Тогда уравнение (7.1) принимает следующий вид:

$$\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0. \qquad (7.3)$$

Выберем потенциал в виде

$$\tilde{\mathbf{W}} = a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D}\ , \qquad (7.4)$$

где компоненты $a, b, c, d, \vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ являются действительными функциями координат и времени. Вводя скалярные и векторные напряженности поля согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
&e = \partial b + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) + md,\\
&f = \partial a + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) + mc,\\
&g = \partial d + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - mb,\\
&h = \partial c + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - ma,\\
&\vec{E} = -\partial\vec{B} - \vec{\nabla}c + \left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right] - m\vec{D},\\
&\vec{F} = -\partial\vec{A} - \vec{\nabla}d - \left[\vec{\nabla}\times\vec{D}\right] - m\vec{C},\\
&\vec{G} = -\partial\vec{D} - \vec{\nabla}a + \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] + m\vec{B},\\
&\vec{H} = -\partial\vec{C} - \vec{\nabla}b - \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right] + m\vec{A},
\end{aligned}
\tag{7.5}
$$

мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(a + i\mathbf{e}_1 b - i\mathbf{e}_2 c - i\mathbf{e}_3 d + i\vec{A} + \mathbf{e}_1\vec{B} + \mathbf{e}_2\vec{C} - \mathbf{e}_3\vec{D}\right) =\\
&\qquad = -e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_2\vec{G} + \mathbf{e}_3\vec{H},
\end{aligned}
\tag{7.6}
$$

и волновое уравнение (7.3) сводится к

$$
\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)\left(-e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1\vec{F} + \mathbf{e}_2\vec{G} + \mathbf{e}_3\vec{H}\right) = 0\,. \tag{7.7}
$$

Производя действие оператора в левой части уравнения и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем систему уравнений для напряженностей полей, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$
\begin{aligned}
&\partial f + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) - mh = 0\,,\\
&\partial e + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) - mg = 0\,,\\
&\partial h + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) + mf = 0\,,\\
&\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) + me = 0,\\
&\partial\vec{F} + \vec{\nabla}g - \left[\vec{\nabla}\times\vec{G}\right] - m\vec{H} = 0\,,\\
&\partial\vec{E} + \vec{\nabla}h + \left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right] - m\vec{G} = 0\,,\\
&\partial\vec{H} + \vec{\nabla}e - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right] + m\vec{F} = 0\,,\\
&\partial\vec{G} + \vec{\nabla}f + \left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] + m\vec{E} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Данные уравнения обладают специфической калибровочной инвариантностью. Нетрудно проверить, что поля (7.5) и уравнения (7.8) не изменяются при следующих подстановках для потенциалов:

$$
\begin{aligned}
&a \Rightarrow a + \partial \varepsilon_a - m\varepsilon_c, \\
&b \Rightarrow b + \partial \varepsilon_b - m\varepsilon_d, \\
&c \Rightarrow c + \partial \varepsilon_c + m\varepsilon_a, \\
&d \Rightarrow d + \partial \varepsilon_d + m\varepsilon_b, \\
&\vec{A} \Rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla}\varepsilon_d, \\
&\vec{B} \Rightarrow \vec{B} - \vec{\nabla}\varepsilon_c, \\
&\vec{C} \Rightarrow \vec{C} - \vec{\nabla}\varepsilon_b, \\
&\vec{D} \Rightarrow \vec{D} - \vec{\nabla}\varepsilon_a,
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

где ε_a, ε_b, ε_c, ε_d – произвольные скалярные функции, удовлетворяющие однородному уравнению Клейна–Гордона.

Умножая каждое из уравнений (7.8) на соответствующую напряженность поля и складывая, получаем:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(f^2 + e^2 + h^2 + g^2 + \vec{F}^2 + \vec{E}^2 + \vec{H}^2 + \vec{G}^2\right) + \\
&+ f\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right) + e\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right) + h\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) + g\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) + \\
&+\left(\vec{F}\cdot\vec{\nabla}g\right) + \left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}h\right) + \left(\vec{H}\cdot\vec{\nabla}e\right) + \left(\vec{G}\cdot\vec{\nabla}f\right) - \\
&-\left(\vec{F}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}\right]\right) + \left(\vec{E}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]\right) - \left(\vec{H}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]\right) + \left(\vec{G}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&w = \frac{1}{8\pi}\left(e^2 + f^2 + g^2 + h^2 + \vec{E}^2 + \vec{F}^2 + \vec{G}^2 + \vec{H}^2\right), \\
&\vec{P} = \frac{c}{4\pi}\left(e\vec{H} + f\vec{G} + g\vec{F} + h\vec{E} - \left[\vec{E}\times\vec{H}\right] - \left[\vec{G}\times\vec{F}\right]\right).
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

Тогда выражение (7.9) может быть представлено в виде

$$
\frac{\partial w}{\partial t} + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right) = 0 \quad . \tag{7.12}
$$

Это аналог теоремы Пойнтинга для полей с массой кванта, не равной нулю. При этом величина w играет роль плотности энергии поля, а $\vec{P}$ – вектора плотности потока энергии.

7.2. Неоднородное седеонное уравнение

Рассмотрим неоднородное седеонное волновое уравнение с феноменологическим источником. В этом случае потенциал поля удовлетворяет уравнению

$$\left(i\mathbf{e_1}\partial-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}-i\mathbf{e_3}m\right)\left(i\mathbf{e_1}\partial-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}-i\mathbf{e_3}m\right)\tilde{\mathbf{W}}=\tilde{\mathbf{J}}. \tag{7.13}$$

По аналогии с гравитационным полем рассмотрим источник поля следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{J}}=-i\mathbf{e_1}4\pi\rho_B-\mathbf{e_2}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B, \tag{7.14}$$

где ρ_B – объемная плотность заряда, а $\vec{j}_B$ – объемная плотность тока. В этом случае мы можем описать поле укороченным потенциалом

$$\tilde{\mathbf{W}}=i\mathbf{e_1}b+\mathbf{e}_2\vec{C}, \tag{7.15}$$

где $b(\vec{r},t)$ является скалярной частью, а $\vec{C}(\vec{r},t)$ векторной частью четырехмерного потенциала. При этом отличны от нуля только следующие напряженности поля:

$$\begin{aligned}
&e=\partial b+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right),\\
&g=-mb,\\
&\vec{E}=\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right],\\
&\vec{F}=-m\vec{C},\\
&\vec{H}=-\partial\vec{C}-\vec{\nabla}b.
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Волновое уравнение (7.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_1}\partial-\mathbf{e_2}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_3}m\right)\left(-e-i\mathbf{e_2}g-i\vec{E}+\mathbf{e_1}\vec{F}+\mathbf{e_3}\vec{H}\right)=\\
&=-i\mathbf{e_1}4\pi\rho_B-\mathbf{e_2}\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Тогда система уравнений для напряженностей поля записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\partial e+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-mg=4\pi\rho_B\ ,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=0\ ,\\
&\partial g+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)+me=0\ ,\\
&\partial\vec{F}+\vec{\nabla}g-m\vec{H}=0\ ,\\
&\partial\vec{E}+\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=0\ ,\\
&\partial\vec{H}+\vec{\nabla}e-\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]+m\vec{F}=-\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B\ ,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right]+m\vec{E}=0\ .
\end{aligned}\tag{7.18}$$

С другой стороны, применяя к уравнению (7.17) оператор $\left(i\mathbf{e}_1\partial-\mathbf{e}_2\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_3 m\right)$, получаем волновые уравнения для напряженностей поля:

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)e=4\pi\left(\partial\rho_B+\frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_B\right)\right),\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g=-4\pi m\rho_B,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{F}=-m\frac{4\pi}{c}\vec{j}_B,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{E}=\frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_B\right],\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{H}=-4\pi\left(\frac{1}{c}\partial\vec{j}_B+\vec{\nabla}\rho_B\right).
\end{aligned}\tag{7.19}$$

Предполагая сохранение заряда

$$\partial\rho_B+\frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_B\right)=0\ ,\tag{7.20}$$

мы можем выбрать напряженность скалярного поля e равной нулю. Это эквивалентно следующему калибровочному условию:

$$\partial b+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right)=0\ ,\tag{7.21}$$

аналогичному условию калибровки Лоренца в электродинамике.

7.3. Поле статичного точечного скалярного источника

В случае когда заряды в системе неподвижны, $\vec{j}_B = 0$, и потенциал поля может быть выбран в виде скалярного потенциала

$$\tilde{\mathbf{W}} = i\mathbf{e_1}b(\vec{r}). \tag{7.22}$$

Тогда отличны от нуля только две компоненты напряженностей поля:

$$\begin{aligned} g &= -mb, \\ \vec{H} &= -\vec{\nabla} b. \end{aligned} \tag{7.23}$$

Для них уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} &(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}) - mg = 4\pi\rho_B, \\ &\vec{\nabla} g - m\vec{H} = 0, \\ &[\vec{\nabla}\times\vec{H}] = 0. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Рассмотрим точечный источник поля. В этом случае плотность заряда равна

$$\rho_B = q_B \delta(\vec{r}), \tag{7.25}$$

где q_B – точечный заряд. Тогда стационарное волновое уравнение может быть записано в сферических координатах в следующей форме:

$$\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\right) b(\vec{r}) = -4\pi q_B \delta(\vec{r}). \tag{7.26}$$

Частным решением уравнения (7.26) является

$$b = \frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right). \tag{7.27}$$

Таким образом, стационарное поле точечного источника имеет скалярную и векторную компоненты:

$$g_B = -\frac{m_0 c}{\hbar}\frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right), \tag{7.28}$$

$$\vec{H}_B = \left(\frac{1}{r} + \frac{m_0 c}{\hbar}\right)\frac{q_B}{r}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} r\right)\vec{r}_0, \tag{7.29}$$

где $\vec{r}_0$ – единичный радиус-вектор.

7.4. Взаимодействие точечных зарядов

Рассмотрим взаимодействие двух неподвижных точечных зарядов за счет перекрытия их полей. Учитывая, что поле в этом случае представляется суммой двух полей $g = g_{B1} + g_{B2}$ и $\vec{H} = \vec{H}_{B1} + \vec{H}_{B2}$, из выражения (7.11) получаем, что энергия взаимодействия двух зарядов выражается следующим образом:

$$W_{BB} = \frac{1}{4\pi}\int\left\{g_{B1}g_{B2} + \left(\vec{H}_{B1}\cdot\vec{H}_{B2}\right)\right\} dV\,, \tag{7.30}$$

где интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда (7.28) и (7.29), получаем:

$$W_{BB} = \frac{q_{B1}q_{B2}}{R}\exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar}R\right), \tag{7.31}$$

где R – расстояние между точечными зарядами.

7.5. Уравнение первого порядка

Среди решений уравнения (7.1) существует класс решений, удовлетворяющих волновому уравнению первого порядка:

$$\left(i\mathbf{e_1}\partial - \mathbf{e_2}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_3}m\right)\tilde{\mathbf{W}} = 0. \tag{7.32}$$

В уравнении (7.32) базисные элементы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e_3}$ и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ играют роль пространственно-временных операторов, которые преобразуют потенциал поля $\tilde{\mathbf{W}}$ посредством изменения его пространственно-временной структуры. Выбирая потенциал в виде (7.4), мы получаем, что седеонное уравнение (7.32) эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\partial a + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) + mc = 0,$$

$$\partial b + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right) + md = 0,$$

$$\partial c + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - ma = 0,$$

$$\partial d + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) - mb = 0,$$

$$\begin{aligned}
&\partial\vec{A}+\vec{\nabla}d+\left[\vec{\nabla}\times\vec{D}\right]+m\vec{C}=0,\\
&\partial\vec{B}+\vec{\nabla}c-\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right]+m\vec{D}=0,\\
&\partial\vec{C}+\vec{\nabla}b+\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]-m\vec{A}=0,\\
&\partial\vec{D}+\vec{\nabla}a-\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]-m\vec{B}=0.
\end{aligned} \tag{7.33}$$

Фактически эти уравнения описывают специальные поля, у которых напряженности равны нулю [30] (см. выражение (7.5)).

Умножая скалярно каждое уравнение системы (7.33) на соответствующие компоненты потенциала $\tilde{\mathbf{W}}$ и складывая, получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2+\vec{D}^2\right)+\\
&+a\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right)+b\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{C}\right)+c\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)+d\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\\
&+\left(\vec{A}\cdot\vec{\nabla}d\right)+\left(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}c\right)+\left(\vec{C}\cdot\vec{\nabla}b\right)+\left(\vec{D}\cdot\vec{\nabla}a\right)+\\
&+\left(\vec{A}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{D}\right]\right)-\left(\vec{B}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{C}\right]\right)+\\
&+\left(\vec{C}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{B}\right]\right)-\left(\vec{D}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]\right)=0.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathrm{W}=\frac{1}{8\pi}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\vec{A}^2+\vec{B}^2+\vec{C}^2+\vec{D}^2\right), \tag{7.35}$$

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left(a\vec{D}+b\vec{C}+c\vec{B}+d\vec{A}-\left[\vec{A}\times\vec{D}\right]-\left[\vec{C}\times\vec{B}\right]\right). \tag{7.36}$$

Тогда уравнение (7.34) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial\mathrm{W}}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{S}\right)=0. \tag{7.37}$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для полей с массой кванта, не равной нулю (описываемых уравнением первого порядка), записанной для потенциалов поля.

7.6. Решение уравнения первого порядка в виде плоской волны

Однородное волновое уравнение первого порядка

$$\left(i\mathbf{e}_1 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_2 \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\mathbf{W}} = 0 \qquad (7.38)$$

имеет решение в виде плоской волны. Будем искать потенциал в виде

$$\tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{U}} \exp\left\{ -i\omega t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \qquad (7.39)$$

где ω – частота, $\vec{k}$ – волновой вектор. Амплитуда волны $\tilde{\mathbf{U}}$ не зависит от координат и времени. Дисперсионное соотношение (зависимость частоты от волнового вектора) для уравнения (7.38) имеет следующий вид:

$$\omega_{\pm} = \pm \sqrt{c^2 k^2 + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}} . \qquad (7.40)$$

В общем случае решение уравнения (7.38) может быть записано в виде плоской волны следующего вида:

$$\tilde{\mathbf{W}} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\mathbf{M}} \exp\left\{ -i\omega_{\pm} t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \qquad (7.41)$$

где $\tilde{\mathbf{M}}$ – произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени. Это обусловлено тем, что выражение в круглых скобках является делителем нуля:

$$\left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right)\left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_{\pm}}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \equiv 0 . \qquad (7.42)$$

7.7. Неоднородное волновое уравнение первого порядка

Рассмотрим неоднородное уравнение, соответствующее уравнению (7.32):

$$\left(i\mathbf{e}_1 \partial - \mathbf{e}_2 \vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m \right) \tilde{\mathbf{W}} = \tilde{\mathbf{I}}. \qquad (7.43)$$

Здесь седеонный источник $\tilde{\mathbf{I}}$ описывает заряды и соответствующие токи. Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}$ в виде (7.4), мы получаем следующее уравнение для напряженностей поля:

$$-e + i\mathbf{e}_1 f - i\mathbf{e}_2 g + i\mathbf{e}_3 h - i\vec{E} + \mathbf{e}_1 \vec{F} + \mathbf{e}_2 \vec{G} + \mathbf{e}_3 \vec{H} = \mathbf{I}_0 + \vec{\mathbf{I}} . \qquad (7.44)$$

Данное уравнение означает, что напряженности поля отличны от нуля только в области источников.

Рассмотрим источник в виде

$$\tilde{\mathbf{I}} = -i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_L + \mathbf{e}_1 \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L , \qquad (7.45)$$

где ρ_L – объемная плотность заряда, $\vec{j}_L$ – объемная плотность тока. В этом случае уравнение (7.44) записывается как

$$-i\mathbf{e}_2 g + \mathbf{e}_1\vec{F} = -i\mathbf{e}_2 4\pi\rho_L + \mathbf{e}_1 \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L . \qquad (7.46)$$

Применяя к (7.46) оператор $\left(i\mathbf{e}_1\partial - \mathbf{e}_2\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_3 m\right)$ и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, имеем следующие уравнения для напряженностей поля:

$$\begin{gathered}
g = 4\pi\rho_L,\\
\vec{F} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_L,\\
\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) = 4\pi\left\{\partial\rho_L + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_L\right)\right\},\\
\left[\vec{\nabla}\times\vec{F}\right] = \frac{4\pi}{c}\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_L\right],\\
\partial\vec{F} + \vec{\nabla}g = 4\pi\left\{\frac{1}{c}\partial\vec{j}_L + \vec{\nabla}\rho_L\right\}.
\end{gathered} \qquad (7.47)$$

Предполагая сохранение заряда

$$\partial\rho_L + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_L\right) = 0 , \qquad (7.48)$$

мы получаем из (7.47) следующее калибровочное условие:

$$\partial g + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right) = 0 , \qquad (7.49)$$

которое аналогично условию калибровки Лоренца, но только не для потенциалов, а для напряженностей поля.

Рассмотрим стационарное поле, создаваемое скалярным точечным источником. В этом случае

$$\rho_L = q_L\delta\left(\vec{r}\right), \qquad (7.50)$$

где q_L является точечным зарядом. Тогда напряженность скалярного поля равна

$$g_L(\vec{r}) = 4\pi\, q_L \delta(\vec{r}) . \tag{7.51}$$

Поскольку напряженность поля отлична от нуля только в области источника, это означает, что два точечных заряда q_{L1} и q_{L2} взаимодействуют только тогда, когда они находятся в одной и той же точке пространства. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов в этом случае равна

$$W_{LL} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V g_{L1} g_{L2}\, dV = 4\pi q_{L1} q_{L2} \delta\left(\vec{R}\right), \tag{7.52}$$

где $\vec{R}$ – это вектор, соединяющий точечные заряды.

Также можно предположить существование взаимодействия между зарядами q_B и q_L за счет перекрытия скалярных полей g_B и g_L. В этом случае поля определяются выражениями (7.28) и (7.51), так что энергия взаимодействия равна

$$W_{BL} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_V g_B g_L dV . \tag{7.53}$$

В итоге получаем:

$$W_{BL} = \frac{m_0 c}{\hbar} \frac{q_B q_L}{R} \exp\left(-\frac{m_0 c}{\hbar} R \right), \tag{7.54}$$

где R – расстояние между зарядами q_B и q_L .

7.8. Выводы

Таким образом, рассмотрено седеонное обобщение уравнений, описывающих поля с массой кванта, не равной нулю. Показано, что седеонный подход позволяет реализовать скалярно-векторное описание таких полей и сформулировать для них уравнения, аналогичные уравнениям электромагнитного поля в классической электродинамике.

Рассмотрено седеонное волновое уравнение второго порядка для седеонной волновой функции. Показано, что это уравнение может быть интерпретировано как уравнение для потенциалов силового поля. Продемонстрировано, что волновое уравнение второго порядка для потенциалов может быть представлено в виде системы уравнений первого порядка для напряженностей поля, аналогичной системе уравнений Максвелла. Определены понятия плотности энергии и плотности потока энергии поля с ненулевой массой кванта. Получено выражение, описывающее закон сохранения энергии, аналогичное теореме Пойнтинга в электродинамике. Показано, что поле точечных зарядов q_B описывается потенциалами типа потенциалов Юкавы. Рассмотрено взаимодействие двух точечных зарядов q_B, обусловленное перекрытием скалярных и векторных полей, рассчитана зависимость энергии взаимодействия от расстояния между зарядами.

Также рассмотрено поле, описываемое волновым уравнением первого порядка. Показано, что напряженности данного поля отличны от нуля только в области источников, поэтому точечные заряды q_L взаимодействуют только тогда, когда они находятся в одной и той же точке пространства. Найдено решение однородного седеонного уравнения первого порядка в виде плоской волны.

Показана возможность описания взаимодействия точечных зарядов q_B и q_L в терминах перекрытия скалярных полей.

Глава 8

Симметричные уравнения поля

В классической электродинамике поле описывается скалярным φ и векторным $\vec{A}$ потенциалами [31]. При этом напряженности электрического и магнитного полей определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\partial\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi, \\ \vec{H} &= \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}\right]. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Здесь $\vec{\nabla}$ – оператор Гамильтона (оператор набла), и мы использовали дифференциальный оператор по времени в следующей форме:

$$\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \tag{8.2}$$

где c – скорость света. Потенциалы удовлетворяют калибровке Лоренца:

$$\partial\varphi + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = 0\,. \tag{8.3}$$

Уравнения электромагнитного поля являются калибровочно-инвариантными. Подстановки вида

$$\begin{aligned} \varphi &\to \varphi + \partial\alpha, \\ \vec{A} &\to \vec{A} - \vec{\nabla}\alpha \end{aligned} \tag{8.4}$$

не изменяют (см. 8.1) электрическое и магнитное поля. Здесь $\alpha(\vec{r},t)$ – произвольная скалярная функция, удовлетворяющая, в силу калибровки Лоренца (8.3), однородному волновому уравнению. Однако, в случае когда масса кванта поля не равна нулю, существует проблема нарушения калибровочной инвариантности [56, 57].

В настоящей главе седеонный подход используется для конструирования симметричных полевых уравнений. Обсуждается калибровочная (градиентная) инвариантность симметричных седеонных уравнений для полей с нулевой и ненулевой массой кванта.

8.1. Симметричное уравнение второго порядка для полей с массой кванта, не равной нулю

Рассмотрим седеонное волновое уравнение второго порядка для поля с массивным квантом [19]:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} = \tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{m}, \qquad (8.5)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m}$ – седеонный потенциал, $\tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{m}$ – феноменологический седеонный источник поля с массивным квантом (индекс $\mathbf{m}$). Здесь и далее используются следующие обозначения операторов:

$$\begin{aligned}
&\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\\
&\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a_1} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a_2} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a_3},\\
&m = \frac{m_0 c}{\hbar}.
\end{aligned} \qquad (8.6)$$

Выберем потенциал в виде

$$\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} = ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4, \qquad (8.7)$$

где компоненты a_s и $\vec{A}_\mathrm{s}$ являются функциями координат и времени. Здесь и далее индекс s принимает значения: $\mathrm{s} = 1, 2, 3, 4$. Также выберем источник поля в виде

$$\tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{m} = -i\rho_1\mathbf{e_t} + i\rho_2\mathbf{e_r} - \rho_3 + i\rho_4\mathbf{e_{tr}} - \vec{j}_1\mathbf{e_r} - \vec{j}_2\mathbf{e_t} + \vec{j}_3\mathbf{e_{tr}} - \vec{j}_4 i, \qquad (8.8)$$

где $\rho_\mathrm{s} = 4\pi\rho'_\mathrm{s}$ (ρ'_s – объемные плотности зарядов), а $\vec{j}_\mathrm{s} = \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}\,'_\mathrm{s}$ ($\vec{j}\,'_\mathrm{s}$ – объемные плотности токов). Перемножая операторы в левой части уравнения (8.5), получаем волновые уравнения для скалярных и векторных компонентов потенциалов

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)a_\mathrm{s} = \rho_\mathrm{s},\\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{A}_\mathrm{s} = \vec{j}_\mathrm{s}.
\end{aligned} \qquad (8.9)$$

Введем напряженности скалярного поля g_s и напряженности векторного поля $\vec{G}_\mathrm{s}$ согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
g_1 &= \partial a_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1\right) + m a_4, \\
g_2 &= \partial a_2 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_2\right) - m a_3, \\
g_3 &= \partial a_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_3\right) + m a_2, \\
g_4 &= \partial a_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_4\right) - m a_1, \\
\vec{G}_1 &= -\partial \vec{A}_1 - \vec{\nabla} a_1 - \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_2\right] + m\vec{A}_4, \\
\vec{G}_2 &= -\partial \vec{A}_2 - \vec{\nabla} a_2 + \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_1\right] - m\vec{A}_3, \\
\vec{G}_3 &= -\partial \vec{A}_3 - \vec{\nabla} a_3 + \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_4\right] + m\vec{A}_2, \\
\vec{G}_4 &= -\partial \vec{A}_4 - \vec{\nabla} a_4 - \left[\vec{\nabla} \times \vec{A}_3\right] - m\vec{A}_1.
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

Заметим, что напряженности поля (8.10) имеют специфическую калибровочную инвариантность. Нетрудно проверить, что g_s и $\vec{G}_s$ не изменяются при следующих заменах потенциалов:

$$
\begin{aligned}
a_1 &\Rightarrow a_1 + \partial\varepsilon_1 - m\varepsilon_4, \\
a_2 &\Rightarrow a_2 + \partial\varepsilon_2 + m\varepsilon_3, \\
a_3 &\Rightarrow a_3 + \partial\varepsilon_3 - m\varepsilon_2, \\
a_4 &\Rightarrow a_4 + \partial\varepsilon_4 + m\varepsilon_1, \\
\vec{A}_1 &\Rightarrow \vec{A}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1, \\
\vec{A}_2 &\Rightarrow \vec{A}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2, \\
\vec{A}_3 &\Rightarrow \vec{A}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3, \\
\vec{A}_4 &\Rightarrow \vec{A}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 являются произвольными скалярными функциями, удовлетворяющими однородному волновому уравнению Клейна–Гордона. Принимая во внимание (8.10), имеем

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4\right) = \\
&= -g_1 + ig_2\mathbf{e_{tr}} + ig_3\mathbf{e_t} - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_3\mathbf{e_r} + \vec{G}_4\mathbf{e_t},
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

и исходное волновое уравнение (8.5) принимает вид

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(-g_1+ig_2\mathbf{e_{tr}}+ig_3\mathbf{e_t}-ig_4\mathbf{e_r}+\vec{G}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{G}_2+\vec{G}_3\mathbf{e_r}+\vec{G}_4\mathbf{e_t}\right)=$$
$$=-i\rho_1\mathbf{e_t}+i\rho_2\mathbf{e_r}-\rho_3+i\rho_4\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_1\mathbf{e_r}-\vec{j}_2\mathbf{e_t}+\vec{j}_3\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_4 i. \tag{8.13}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (8.13) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем систему уравнений для напряженностей поля, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$\begin{aligned}
&\partial g_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_1\right)-mg_4=\rho_1\ ,\\
&\partial g_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_2\right)+mg_3=\rho_2,\\
&\partial g_3+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_3\right)-mg_2=\rho_3,\\
&\partial g_4+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right)+mg_1=\rho_4,\\
&\partial\vec{G}_1+\vec{\nabla}g_1-\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_2\right]+m\vec{G}_4=-\vec{j}_1,\\
&\partial\vec{G}_2+\vec{\nabla}g_2+\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_1\right]-m\vec{G}_3=-\vec{j}_2,\\
&\partial\vec{G}_3+\vec{\nabla}g_3+\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right]+m\vec{G}_2=-\vec{j}_3,\\
&\partial\vec{G}_4+\vec{\nabla}g_4-\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_3\right]-m\vec{G}_1=-\vec{j}_4.
\end{aligned} \tag{8.14}$$

Уравнения (8.14) инвариантны относительно следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
&g_1\Rightarrow g_1+\partial\varepsilon_1-m\varepsilon_4,\\
&g_2\Rightarrow g_2-\partial\varepsilon_2-m\varepsilon_3,\\
&g_3\Rightarrow g_3+\partial\varepsilon_3-m\varepsilon_2,\\
&g_4\Rightarrow g_4-\partial\varepsilon_4-m\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_1\Rightarrow\vec{G}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_2\Rightarrow\vec{G}_2+\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{G}_3\Rightarrow\vec{G}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{G}_4\Rightarrow\vec{G}_4+\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (8.14) на соответствующую напряженность поля и складывая, получаем:

$$\frac{1}{2}\partial\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2+\vec{G}_1^2+\vec{G}_2^2+\vec{G}_3^2+\vec{G}_4^2\right)+$$
$$+g_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_1\right)+g_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_2\right)+g_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_3\right)+g_4\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right)+$$
$$+\left(\vec{G}_1\cdot\vec{\nabla}g_1\right)+\left(\vec{G}_2\cdot\vec{\nabla}g_2\right)+\left(\vec{G}_3\cdot\vec{\nabla}g_3\right)+\left(\vec{G}_4\cdot\vec{\nabla}g_4\right)-$$
$$-\left(\vec{G}_1\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_2\right]\right)+\left(\vec{G}_2\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_1\right]\right)+\left(\vec{G}_3\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right]\right)-\left(\vec{G}_4\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_3\right]\right)=$$
$$=g_1\rho_1+g_2\rho_2+g_3\rho_3+g_4\rho_4-\left(\vec{G}_1\cdot\vec{j}_1\right)-\left(\vec{G}_2\cdot\vec{j}_2\right)-\left(\vec{G}_3\cdot\vec{j}_3\right)-\left(\vec{G}_4\cdot\vec{j}_4\right). \quad (8.16)$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для поля с массой кванта, не равной нулю. Член

$$w=\frac{1}{8\pi}\left(g_1^2+g_2^2+g_3^2+g_4^2+\vec{G}_1^2+\vec{G}_2^2+\vec{G}_3^2+\vec{G}_4^2\right) \quad (8.17)$$

играет роль плотности энергии поля, в то время как член

$$\vec{p}=\frac{c}{4\pi}\left(g_1\vec{G}_1+g_2\vec{G}_2+g_3\vec{G}_3+g_4\vec{G}_4+\left[\vec{G}_1\times\vec{G}_2\right]-\left[\vec{G}_3\times\vec{G}_4\right]\right) \quad (8.18)$$

играет роль плотности потока энергии.

С другой стороны, применяя оператор

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)$$

к уравнению (8.13), получаем волновое уравнение для напряженностей поля:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\times$$
$$\times\left(-g_1+ig_2\mathbf{e_{tr}}+ig_3\mathbf{e_t}-ig_4\mathbf{e_r}+\vec{G}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{G}_2+\vec{G}_3\mathbf{e_r}+\vec{G}_4\mathbf{e_t}\right)=$$
$$=\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\times$$
$$\times\left(-i\rho_1\mathbf{e_t}+i\rho_2\mathbf{e_r}-\rho_3+i\rho_4\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_1\mathbf{e_r}-\vec{j}_2\mathbf{e_t}+\vec{j}_3\mathbf{e_{tr}}-\vec{j}_4 i\right). \quad (8.19)$$

Разделяя члены с различными пространственно-временными свойствами, получаем следующее волновое уравнение для напряженностей поля g_s и $\vec{G}_s$:

$$
\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_1=-\,\partial\rho_1-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_1\right)-m\rho_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_2=-\partial\rho_2-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_2\right)+m\rho_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_3=-\partial\rho_3-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_3\right)-m\rho_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)g_4=-\partial\rho_4-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_4\right)+m\rho_1,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_1=\vec{\nabla}\rho_1+\partial\vec{j}_1+\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_2\right]-m\,\vec{j}_4,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_2=\vec{\nabla}\rho_2+\partial\vec{j}_2-\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_1\right]+m\,\vec{j}_3,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_3=\vec{\nabla}\rho_3+\partial\vec{j}_3-\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_4\right]-m\,\vec{j}_2,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{G}_4=\vec{\nabla}\rho_4+\partial\vec{j}_4+\left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_3\right]+m\,\vec{j}_1.
\end{aligned}
\tag{8.20}
$$

Нетрудно проверить, что уравнения (8.20) инвариантны по отношению к следующим подстановкам:

$$
\begin{aligned}
&\rho_1\Rightarrow\rho_1+\partial\varepsilon_1-m\varepsilon_4,\\
&\rho_2\Rightarrow\rho_2+\partial\varepsilon_2+m\varepsilon_3,\\
&\rho_3\Rightarrow\rho_3+\partial\varepsilon_3-m\varepsilon_2,\\
&\rho_4\Rightarrow\rho_4+\partial\varepsilon_4+m\varepsilon_1,\\
&\vec{j}_1\Rightarrow\vec{j}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{j}_2\Rightarrow\vec{j}_2-\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{j}_3\Rightarrow\vec{j}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{j}_4\Rightarrow\vec{j}_4-\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{8.21}
$$

В качестве примера рассмотрим поля, создаваемые источниками одного типа ρ_1 и $\vec{j}_1$. В этом случае поле описывается потенциалами a_1 и $\vec{A}_1$:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}=ia_1\mathbf{e_t}+\vec{A}_1\mathbf{e_r}\,. \tag{8.22}$$

Тогда мы имеем только следующие отличные от нуля напряженности поля:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \partial a_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_1\right),\\
g_4 &= -m a_1,\\
\vec{G}_1 &= -\partial\vec{A}_1 - \vec{\nabla}a_1,\\
\vec{G}_2 &= \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_1\right],\\
\vec{G}_4 &= -m\vec{A}_1,
\end{aligned} \tag{8.23}$$

и уравнение (8.13) принимает форму

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(-g_1 - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_4\mathbf{e_t}\right) = -i\rho_1\mathbf{e_t} - \vec{j}_1\mathbf{e_r}. \tag{8.24}$$

Тогда система уравнений (8.14) может быть переписана в виде

$$\begin{aligned}
&\partial g_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_1\right) - mg_4 = \rho_1\,,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_2\right) = 0,\\
&\partial g_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}_4\right) + mg_1 = 0,\\
&\partial\vec{G}_1 + \vec{\nabla}g_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_2\right] + m\vec{G}_4 = -\vec{j}_1,\\
&\partial\vec{G}_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_1\right] = 0,\\
&\left[\vec{\nabla}\times\vec{G}_4\right] + m\vec{G}_2 = 0,\\
&\partial\vec{G}_4 + \vec{\nabla}g_4 - m\vec{G}_1 = 0.
\end{aligned} \tag{8.25}$$

Система (8.25) является аналогом уравнений Прока–Максвелла. Кроме того, мы имеем следующую систему волновых уравнений для напряженностей поля:

$$\begin{aligned}
\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)g_1 &= \partial\rho_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_1\right),\\
\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)g_4 &= -m\rho_1,\\
\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{G}_1 &= -\vec{\nabla}\rho_1 - \partial\vec{j}_1,\\
\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{G}_2 &= \left[\vec{\nabla}\times\vec{j}_1\right],\\
\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{G}_4 &= -m\vec{j}_1.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

Подразумевая сохранение заряда

$$\partial\rho_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_1\right) = 0\,, \tag{8.27}$$

мы можем выбрать скалярное поле g_1 равным нулю. Это эквивалентно следующему калибровочному условию:

$$\partial a_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_1\right) = 0\,, \tag{8.28}$$

совпадающему с калибровкой Лоренца в электродинамике.

8.2. Волновое уравнение второго порядка для полей с массой кванта, равной нулю

В случае когда масса кванта равна нулю, волновое уравнение (8.5) принимает следующую форму:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\mathbf{\tilde{W}_0} = \mathbf{\tilde{J}_0}\,, \tag{8.29}$$

где потенциал $\mathbf{\tilde{W}_0}$ и источник $\mathbf{\tilde{J}_0}$ поля с массой кванта, равной нулю (индекс **0**), могут быть выбраны как прежде в форме (8.7) и (8.8)

$$\mathbf{\tilde{W}_0} = ib_1\mathbf{e_t} - ib_2\mathbf{e_r} + b_3 - ib_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e_r} + \vec{B}_2\mathbf{e_t} - \vec{B}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{B}_4\,, \tag{8.30}$$

$$\mathbf{\tilde{J}_0} = -i\beta_1\mathbf{e_t} + i\beta_2\mathbf{e_r} - \beta_3 + i\beta_4\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_1\mathbf{e_r} - \vec{l}_2\mathbf{e_t} + \vec{l}_3\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_4 i\,, \tag{8.31}$$

где $\beta_s = 4\pi\beta'_s$ (β'_s – объемные плотности зарядов) и $\vec{l}_s = \dfrac{4\pi}{c}\vec{l}'_s$ ($\vec{l}'_s$ – объемные плотности токов). Введем скалярные и векторные напряженности поля согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \partial b_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1\right),\\
h_2 &= \partial b_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_2\right),\\
h_3 &= \partial b_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_3\right),\\
h_4 &= \partial b_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_4\right)_1,\\
\vec{H}_1 &= -\partial\vec{B}_1 - \vec{\nabla}b_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_2\right],\\
\vec{H}_2 &= -\partial\vec{B}_2 - \vec{\nabla}b_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right],\\
\vec{H}_3 &= -\partial\vec{B}_3 - \vec{\nabla}b_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_4\right],\\
\vec{H}_4 &= -\partial\vec{B}_4 - \vec{\nabla}b_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_3\right].
\end{aligned} \tag{8.32}$$

Заметим, что определения (8.32) инвариантны относительно следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
&b_1 \Rightarrow b_1 + \partial\varepsilon_1, \\
&b_2 \Rightarrow b_2 + \partial\varepsilon_2, \\
&b_3 \Rightarrow b_3 + \partial\varepsilon_3, \\
&b_4 \Rightarrow b_4 + \partial\varepsilon_4, \\
&\vec{B}_1 \Rightarrow \vec{B}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1, \\
&\vec{B}_2 \Rightarrow \vec{B}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2, \\
&\vec{B}_3 \Rightarrow \vec{B}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3, \\
&\vec{B}_4 \Rightarrow \vec{B}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Принимая во внимание (8.32), получаем, что

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(ib_1\mathbf{e_t} - ib_2\mathbf{e_r} + b_3 - ib_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e_r} + \vec{B}_2\mathbf{e_t} - \vec{B}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{B}_4\right) = \\
&= -h_1 + ih_2\mathbf{e_{tr}} + ih_3\mathbf{e_t} - ih_4\mathbf{e_r} + \vec{H}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{H}_2 + \vec{H}_3\mathbf{e_r} + \vec{H}_4\mathbf{e_t},
\end{aligned} \tag{8.34}$$

и уравнение (8.27) может быть переписано в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\left(-h_1 + ih_2\mathbf{e_{tr}} + ih_3\mathbf{e_t} - ih_4\mathbf{e_r} + \vec{H}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{H}_2 + \vec{H}_3\mathbf{e_r} + \vec{H}_4\mathbf{e_t}\right) = \\
&= -i\beta_1\mathbf{e_t} + i\beta_2\mathbf{e_r} - \beta_3 + i\beta_4\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_1\mathbf{e_r} - \vec{l}_2\mathbf{e_t} + \vec{l}_3\mathbf{e_{tr}} - \vec{l}_4 i.
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (8.35) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем две независимых системы уравнений для напряженностей поля [20], аналогичных системе уравнений Максвелла в электродинамике. Первая система:

$$\begin{aligned}
&\partial h_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right) = \beta_1, \\
&\partial h_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right) = \beta_2, \\
&\partial\vec{H}_1 + \vec{\nabla}h_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right] = -\vec{l}_1, \\
&\partial\vec{H}_2 + \vec{\nabla}h_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right] = -\vec{l}_2.
\end{aligned} \tag{8.36}$$

Эта система инвариантна относительно следующих преобразований:

$$
\begin{aligned}
&h_1 \Rightarrow h_1 + \partial\varepsilon_1,\\
&h_2 \Rightarrow h_2 - \partial\varepsilon_2,\\
&\vec{H}_1 \Rightarrow \vec{H}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{H}_2 \Rightarrow \vec{H}_2 + \vec{\nabla}\varepsilon_2.
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (8.36) на соответствующую напряженность поля и складывая все уравнения, получаем

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(h_1^2 + h_2^2 + \vec{H}_1^2 + \vec{H}_2^2\right) +\\
&+h_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right) + h_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right) +\\
&+\left(\vec{H}_1\cdot\vec{\nabla}h_1\right) + \left(\vec{H}_2\cdot\vec{\nabla}h_2\right) -\\
&-\left(\vec{H}_1\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]\right) + \left(\vec{H}_2\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]\right) =\\
&= h_1\beta_1 + h_2\beta_2 - \left(\vec{H}_1\cdot\vec{l}_1\right) - \left(\vec{H}_2\cdot\vec{l}_2\right).
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для поля первого типа. Член

$$
w = \frac{1}{8\pi}\left(h_1^2 + h_2^2 + \vec{H}_1^2 + \vec{H}_2^2\right)
\tag{8.39}
$$

играет роль объемной плотности энергии поля, в то время как член

$$
\vec{p} = \frac{c}{4\pi}\left(h_1\vec{H}_1 + h_2\vec{H}_2 + \left[\vec{H}_1\times\vec{H}_2\right]\right)
\tag{8.40}
$$

играет роль объемной плотности потока энергии.

Вторая система уравнений имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\partial h_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_3\right) = \beta_3,\\
&\partial h_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_4\right) = \beta_4,\\
&\partial\vec{H}_3 + \vec{\nabla}h_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_4\right] = -\vec{l}_3,\\
&\partial\vec{H}_4 + \vec{\nabla}h_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_3\right] = -\vec{l}_4.
\end{aligned}
\tag{8.41}
$$

Эта система инвариантна относительно следующих преобразований:

$$\begin{aligned}
&h_3 \Rightarrow h_3 + \partial\varepsilon_3, \\
&h_4 \Rightarrow h_4 - \partial\varepsilon_4, \\
&\vec{H}_3 \Rightarrow \vec{H}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3, \\
&\vec{H}_4 \Rightarrow \vec{H}_4 + \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{8.42}$$

Умножая скалярно каждое из уравнений (8.41) на соответствующую напряженность поля и складывая все уравнения, получаем

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(h_3^2 + h_4^2 + \vec{H}_3^2 + \vec{H}_4^2\right) + \\
&+h_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_3\right) + h_4\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_4\right) + \\
&+\left(\vec{H}_3\cdot\vec{\nabla}h_3\right) + \left(\vec{H}_4\cdot\vec{\nabla}h_4\right) - \\
&-\left(\vec{H}_3\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_4\right]\right) + \left(\vec{H}_4\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_3\right]\right) = \\
&= h_3\beta_3 + h_4\beta_4 - \left(\vec{H}_3\cdot\vec{l}_3\right) - \left(\vec{H}_4\cdot\vec{l}_4\right).
\end{aligned} \tag{8.43}$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для поля второго типа. Член

$$w = \frac{1}{8\pi}\left(h_3^2 + h_4^2 + \vec{H}_3^2 + \vec{H}_4^2\right) \tag{8.44}$$

играет роль объемной плотности энергии поля, в то время как член

$$\vec{p} = \frac{c}{4\pi}\left(h_3\vec{H}_3 + h_4\vec{H}_4 + \left[\vec{H}_3\times\vec{H}_4\right]\right) \tag{8.45}$$

играет роль объемной плотности потока энергии.

Соответственно, волновые уравнения для напряженностей поля также распадаются на две независимых системы. Первая система объединяет потенциалы и источники, преобразующиеся в соответствии с преобразованиями Лоренца первого типа [20] (см. (3.10)):

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_1 = -\partial\beta_1 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_1\right), \\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)h_2 = -\partial\beta_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_2\right), \\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_1 = \vec{\nabla}\beta_1 + \partial\vec{l}_1 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_2\right], \\
&\left(\partial^2 - \Delta\right)\vec{H}_2 = \vec{\nabla}\beta_2 + \partial\vec{l}_2 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_1\right].
\end{aligned} \tag{8.46}$$

Вторая система объединяет потенциалы и источники, преобразующиеся в соответствии с преобразованиями Лоренца второго типа [20] (см. (3.10)):

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta\right)h_3=-\partial\beta_3-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_3\right),\\
&\left(\partial^2-\Delta\right)h_4=-\partial\beta_4-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_4\right),\\
&\left(\partial^2-\Delta\right)\vec{H}_3=\vec{\nabla}\beta_3+\partial\vec{l}_3-\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_4\right],\\
&\left(\partial^2-\Delta\right)\vec{H}_4=\vec{\nabla}\beta_4+\partial\vec{l}_4+\left[\vec{\nabla}\times\vec{l}_3\right].
\end{aligned}\tag{8.47}$$

Уравнения (8.46) и (8.47) инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned}
&\beta_1\Rightarrow\beta_1+\partial\varepsilon_1,\\
&\beta_2\Rightarrow\beta_2+\partial\varepsilon_2,\\
&\beta_3\Rightarrow\beta_3+\partial\varepsilon_3,\\
&\beta_4\Rightarrow\beta_4+\partial\varepsilon_4,\\
&\vec{l}_1\Rightarrow\vec{l}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{l}_2\Rightarrow\vec{l}_2-\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{l}_3\Rightarrow\vec{l}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{l}_4\Rightarrow\vec{l}_4-\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}\tag{8.48}$$

Система уравнений (8.36) соответствует обычной системе уравнений Максвелла. Покажем это. Предположим сохранение зарядов

$$\begin{aligned}
&\partial\beta_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_1\right)=0,\\
&\partial\beta_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{l}_2\right)=0.
\end{aligned}\tag{8.49}$$

Тогда, как это следует из (8.46), можно выбрать скалярные напряженности поля h_1 и h_2 равными нулю, и система уравнений (8.36) принимает вид

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right)=\beta_1,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right)=\beta_2,\\
&\partial\vec{H}_1-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]=-\vec{l}_1,\\
&\partial\vec{H}_2+\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]=-\vec{l}_2.
\end{aligned}\tag{8.50}$$

Здесь $\vec{H}_1$ – напряженность электрического поля; $\vec{H}_2$ – напряженность магнитного поля; β_1 – объемная плотность электрического заряда; β_2 – объемная плотность магнитного заряда; $\vec{l}_1$ – объемная плотность электрического тока; $\vec{l}_2$ – объемная плотность магнитного тока. Принимая во внимание экспериментальный факт отсутствия магнитных зарядов и токов, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_1\right)=\beta_1,\\
&\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}_2\right)=0,\\
&\partial\vec{H}_1-\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_2\right]=-\vec{l}_1,\\
&\partial\vec{H}_2+\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}_1\right]=0,
\end{aligned}\qquad(8.51)$$

которая совпадает с общепринятой системой уравнений Максвелла.

8.3. Уравнение первого порядка для поля с массой кванта, не равной нулю

Рассмотрим поле с массой кванта, не равной нулю, описываемое седеонным уравнением первого порядка

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m}=\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}\,. \qquad (8.52)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}$ – феноменологический источник поля, который может быть выбран в следующей седеонной форме:

$$\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{m}=-d_1+id_2\mathbf{e_{tr}}+id_3\mathbf{e_t}-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{f}_2+\vec{f}_3\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t}\,, \qquad (8.53)$$

где $d_k=4\pi d'_k$ (d'_k – объемные плотности зарядов) и $\vec{f}_k=\dfrac{4\pi}{c}\vec{f}'_k$ ($\vec{f}'_k$ – объемные плотности токов). Выбирая потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m}$ в форме (8.7), мы можем переписать уравнение (8.52) в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(ia_1\mathbf{e_t}-ia_2\mathbf{e_r}+a_3-ia_4\mathbf{e_{tr}}+\vec{A}_1\mathbf{e_r}+\vec{A}_2\mathbf{e_t}-\vec{A}_3\mathbf{e_{tr}}+i\vec{A}_4\right)=\\
&\quad=-d_1+id_2\mathbf{e_{tr}}+id_3\mathbf{e_t}-id_4\mathbf{e_r}+\vec{f}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{f}_2+\vec{f}_3\mathbf{e_r}+\vec{f}_4\mathbf{e_t}.
\end{aligned}\qquad(8.54)$$

Это седеонное уравнение эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\partial a_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_1\right) + m a_4 = d_1,\\
&\partial a_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_2\right) - m a_3 = d_2,\\
&\partial a_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_3\right) + m a_2 = d_3,\\
&\partial a_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}_4\right) - m a_1 = d_4,\\
&-\partial\vec{A}_1 - \vec{\nabla}a_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_2\right] + m\vec{A}_4 = \vec{f}_1,\\
&-\partial\vec{A}_2 - \vec{\nabla}a_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_1\right] - m\vec{A}_3 = \vec{f}_2,\\
&-\partial\vec{A}_3 - \vec{\nabla}a_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_4\right] + m\vec{A}_2 = \vec{f}_3,\\
&-\partial\vec{A}_4 - \vec{\nabla}a_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}_3\right] - m\vec{A}_1 = \vec{f}_4.
\end{aligned}
\tag{8.55}
$$

С другой стороны, вводя напряженности поля в соответствии с определениями (8.10), получаем

$$
\begin{aligned}
&-g_1 + ig_2\mathbf{e_{tr}} + ig_3\mathbf{e_t} - ig_4\mathbf{e_r} + \vec{G}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{G}_2 + \vec{G}_3\mathbf{e_r} + \vec{G}_4\mathbf{e_t} =\\
&\quad = -d_1 + id_2\mathbf{e_{tr}} + id_3\mathbf{e_t} - id_4\mathbf{e_r} + \vec{f}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{f}_2 + \vec{f}_3\mathbf{e_r} + \vec{f}_4\mathbf{e_t}.
\end{aligned}
\tag{8.56}
$$

Это означает, что напряженности поля не равны нулю только в области источников.

Применяя оператор

$$
\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)
$$

к уравнению (8.54), получаем волновое уравнение второго порядка

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\times\\
&\times\left(ia_1\mathbf{e_t} - ia_2\mathbf{e_r} + a_3 - ia_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{A}_1\mathbf{e_r} + \vec{A}_2\mathbf{e_t} - \vec{A}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{A}_4\right) =\\
&= \left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\times\\
&\times\left(-d_1 + id_2\mathbf{e_{tr}} + id_3\mathbf{e_t} - id_4\mathbf{e_r} + \vec{f}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{f}_2 + \vec{f}_3\mathbf{e_r} + \vec{f}_4\mathbf{e_t}\right),
\end{aligned}
\tag{8.57}
$$

которое эквивалентно следующей системе:

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) a_1 = \partial d_1 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_1\right) - m d_4, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) a_2 = \partial d_2 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_2\right) + m d_3, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) a_3 = \partial d_3 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_3\right) - m d_2, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) a_4 = \partial d_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_4\right) + m d_1, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{A}_1 = -\partial \vec{f}_1 - \vec{\nabla} d_1 + \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}_2\right] - m \vec{f}_4, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{A}_2 = -\partial \vec{f}_2 - \vec{\nabla} d_2 - \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}_1\right] + m \vec{f}_3, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{A}_3 = -\partial \vec{f}_3 - \vec{\nabla} d_3 - \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}_4\right] - m \vec{f}_2, \\
&\left(\partial^2 - \Delta + m^2\right) \vec{A}_4 = -\partial \vec{f}_4 - \vec{\nabla} d_4 + \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}_3\right] + m \vec{f}_1.
\end{aligned} \tag{8.58}$$

Система уравнений (8.58) инвариантна относительно следующих преобразований для источников поля:

$$\begin{aligned}
&d_1 \Rightarrow d_1 + \partial \varepsilon_1 + m \varepsilon_4, \\
&d_2 \Rightarrow d_2 + \partial \varepsilon_2 - m \varepsilon_3, \\
&d_3 \Rightarrow d_3 + \partial \varepsilon_3 + m \varepsilon_2, \\
&d_4 \Rightarrow d_4 + \partial \varepsilon_4 - m \varepsilon_1, \\
&\vec{f}_1 \Rightarrow \vec{f}_1 - \vec{\nabla} \varepsilon_1, \\
&\vec{f}_2 \Rightarrow \vec{j}_2 - \vec{\nabla} \varepsilon_2, \\
&\vec{f}_3 \Rightarrow \vec{f}_3 - \vec{\nabla} \varepsilon_3, \\
&\vec{f}_4 \Rightarrow \vec{f}_4 - \vec{\nabla} \varepsilon_4.
\end{aligned} \tag{8.59}$$

В качестве примера рассмотрим поля, создаваемые источниками одного типа d_4 и $\vec{f}_4$:

$$\tilde{\mathbf{I}}_{\mathbf{m}} = -i d_4 \mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{f}_4 \mathbf{e}_{\mathbf{t}}\,. \tag{8.60}$$

В этом случае уравнение (8.56) переписывается как

$$-i g_4 \mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{G}_4 \mathbf{e}_{\mathbf{t}} = -i d_4 \mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{f}_4 \mathbf{e}_{\mathbf{t}}\,. \tag{8.61}$$

Применяя оператор $\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\right)$ к уравнению (8.61) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем уравнения для напряженностей поля

$$
\begin{gathered}
g_4 = d_4, \\
\vec{G}_4 = \vec{f}_4, \\
\partial g_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_4\right) = \partial d_4 + \frac{1}{c}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_4\right), \\
\left[\vec{\nabla} \times \vec{G}_4\right] = \left[\vec{\nabla} \times \vec{f}_4\right], \\
\partial \vec{G}_4 + \vec{\nabla} g_4 = \partial \vec{f}_4 + \vec{\nabla} d_4.
\end{gathered}
\tag{8.62}
$$

Подразумевая сохранение заряда

$$
\partial d_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{f}_4\right) = 0\,, \tag{8.63}
$$

мы имеем следующее калибровочное условие:

$$
\partial g_4 + \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}_4\right) = 0\,, \tag{8.64}
$$

которое аналогично калибровке Лоренца, но только в данном случае записано для напряженностей поля.

8.4. Уравнение первого порядка для поля с массой кванта, равной нулю

В случае поля с массой кванта, равной нулю волновое уравнение первого порядка записывается в виде

$$
\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\right)\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = \tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0}\,, \tag{8.65}
$$

где потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0}$ и феноменологический источник $\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0}$ имеют следующий вид:

$$
\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{0} = ib_1\mathbf{e_t} - ib_2\mathbf{e_r} + b_3 - ib_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{B}_1\mathbf{e_r} + \vec{B}_2\mathbf{e_t} - \vec{B}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{B}_4\,, \tag{8.66}
$$

$$
\tilde{\mathbf{I}}_\mathbf{0} = -\upsilon_1 + i\upsilon_2\mathbf{e_{tr}} + i\upsilon_3\mathbf{e_t} - i\upsilon_4\mathbf{e_r} + \vec{\gamma}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{\gamma}_2 + \vec{\gamma}_3\mathbf{e_r} + \vec{\gamma}_4\mathbf{e_t}\,. \tag{8.67}
$$

Здесь $\upsilon_s = 4\pi\upsilon_s'$ (υ_s' – объемные плотности зарядов) и $\vec{\gamma}_s = \dfrac{4\pi}{c}\vec{\gamma}_s'$ ($\vec{\gamma}_s'$ – объемные плотности токов). Уравнение (8.65) эквивалентно следующей системе:

$$
\begin{aligned}
&\partial b_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_1\right) = \upsilon_1,\\
&\partial b_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_2\right) = \upsilon_2,\\
&\partial b_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_3\right) = \upsilon_3,\\
&\partial b_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}_4\right) = \upsilon_4,\\
&-\partial\vec{B}_1 - \vec{\nabla} b_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_2\right] = \vec{\gamma}_1,\\
&-\partial\vec{B}_2 - \vec{\nabla} b_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_1\right] = \vec{\gamma}_2,\\
&-\partial\vec{B}_3 - \vec{\nabla} b_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_4\right] = \vec{\gamma}_3,\\
&-\partial\vec{B}_4 - \vec{\nabla} b_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{B}_3\right] = \vec{\gamma}_4.
\end{aligned}
\tag{8.68}
$$

Уравнения (8.68) инвариантны по отношению к подстановкам (8.33).

8.5. Обобщение градиентной инвариантности

Градиентная инвариантность седеонных уравнений, описывающих поля с массивным квантом, является свойством оператора $\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\partial - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_\mathbf{tr}m\right)$ и может быть обобщена на более широкий класс скалярно-векторных преобразований [21]. Действительно, определим новый оператор $\hat{\nabla}$ как

$$\hat{\nabla} = \left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\partial - \mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_\mathbf{tr}m\right), \tag{8.69}$$

тогда волновое уравнение (8.5) принимает следующую форму:

$$\hat{\nabla}\hat{\nabla}\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} = \tilde{\mathbf{J}}_\mathbf{m}. \tag{8.70}$$

Это уравнение не изменяется под действием замены потенциала

$$\tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} \Rightarrow \tilde{\mathbf{W}}_\mathbf{m} + \tilde{\mathbf{F}} + \hat{\hat{\nabla}}\tilde{\mathbf{E}}, \tag{8.71}$$

где $\tilde{\mathbf{F}}$ и $\tilde{\mathbf{E}}$ – произвольные функции, удовлетворяющие условиям

$$\hat{\nabla}\tilde{\mathbf{F}} = 0, \tag{8.72}$$

$$\hat{\nabla}\hat{\nabla}\tilde{\mathbf{E}} = 0. \tag{8.73}$$

Условие (8.72) указывает, что потенциал $\tilde{\mathbf{W}}_{\mathbf{m}}$ определяется с точностью до аддитивной функции $\tilde{\mathbf{F}}$, удовлетворяющей однородному волновому уравнению первого порядка, в то время как выражение (8.73) означает, что $\tilde{\mathbf{E}}$ удовлетворяет однородному волновому уравнению второго порядка.

Рассмотрим обобщенное градиентное калибровочное условие. Для потенциала, определенного выражением (8.7), функция $\tilde{\mathbf{E}}$ может быть выбрана в виде

$$\tilde{\mathbf{E}} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} - i\varepsilon_3\mathbf{e}_{\mathbf{t}} + i\varepsilon_4\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{E}_1\mathbf{e}_{\mathbf{tr}} - i\vec{E}_2 + \vec{E}_3\mathbf{e}_{\mathbf{r}} + \vec{E}_4\mathbf{e}_{\mathbf{t}}, \qquad (8.74)$$

где компоненты ε_{s} и $\vec{E}_{\mathrm{s}}$ являются произвольными функциями координат и времени, удовлетворяющими однородному волновому уравнению Клейна–Гордона (8.73). Тогда замена (8.71) приводит к следующей системе преобразований:

$$\begin{aligned}
&a_1 \Rightarrow a_1 + \partial\varepsilon_1 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1\right) - m\varepsilon_4,\\
&a_2 \Rightarrow a_2 + \partial\varepsilon_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2\right) + m\varepsilon_3,\\
&a_3 \Rightarrow a_3 + \partial\varepsilon_3 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3\right) - m\varepsilon_2,\\
&a_4 \Rightarrow a_4 + \partial\varepsilon_4 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_4\right) + m\varepsilon_1,\\
&\vec{A}_1 \Rightarrow \vec{A}_1 + \partial\vec{E}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_2\right] + m\vec{E}_4,\\
&\vec{A}_2 \Rightarrow \vec{A}_2 + \partial\vec{E}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_1\right] - m\vec{E}_3,\\
&\vec{A}_3 \Rightarrow \vec{A}_3 + \partial\vec{E}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_4\right] + m\vec{E}_2,\\
&\vec{A}_4 \Rightarrow \vec{A}_4 + \partial\vec{E}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_3\right] - m\vec{E}_1.
\end{aligned} \qquad (8.75)$$

Если мы выберем векторную часть седеона $\tilde{\mathbf{E}}$ равной нулю ($\vec{E}_{\mathrm{s}} = 0$), тогда подстановки (8.75) переходят в (8.11), а если дополнительно положить массу кванта равной нулю ($m = 0$), то подстановки (8.75) переходят в систему (8.33). Аналогично, подстановки для напряженностей поля имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&g_1 \Rightarrow g_1 + \partial\varepsilon_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_1\right) - m\varepsilon_4,\\
&g_2 \Rightarrow g_2 - \partial\varepsilon_2 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_2\right) - m\varepsilon_3,\\
&g_3 \Rightarrow g_3 + \partial\varepsilon_3 - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_3\right) - m\varepsilon_2,\\
&g_3 \Rightarrow g_3 - \partial\varepsilon_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_4\right) - m\varepsilon_1,\\
&\vec{G}_1 \Rightarrow \vec{G}_1 - \partial\vec{E}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_2\right] + m\vec{E}_4,\\
&\vec{G}_2 \Rightarrow \vec{G}_2 + \partial\vec{E}_2 + \vec{\nabla}\varepsilon_2 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_1\right] + m\vec{E}_3,\\
&\vec{G}_3 \Rightarrow \vec{G}_3 + \partial\vec{E}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_4\right] - m\vec{E}_2,\\
&\vec{G}_4 \Rightarrow \vec{G}_4 - \partial\vec{E}_4 + \vec{\nabla}\varepsilon_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{E}_3\right] - m\vec{E}_1.
\end{aligned}
\tag{8.76}
$$

Если мы выберем векторные части $\vec{G}_s$ равными нулю, тогда система (8.76) переходит в (8.15), а в случае нулевой массы кванта поля в системы (8.37) и (8.42).

8.6. Выводы

Таким образом, мы представили симметричные скалярно-векторные уравнения для полей с нулевой и ненулевой массой кванта. Продемонстрирована калибровочная (градиентная) инвариантность для потенциалов, описываемых уравнениями первого и второго порядка, а также для напряженностей полей, описываемых системами уравнений, аналогичных уравнениям Максвелла.

Глава 9

Уравнения релятивистской квантовой механики

9.1. Седеонное волновое уравнение для квантовой частицы

Рассмотрим седеонное волновое уравнение (3.22), описывающее квантовую частицу:

$$\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\left(i\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,, \qquad (9.1)$$

где волновая функция представляет собой пространственно-временной седеон:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t)=\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}(\vec{r},t)+\vec{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t)\,. \qquad (9.2)$$

В уравнении (9.1) элементы седеонного базиса $\mathbf{e_n}$ и $\mathbf{a_m}$ выполняют роль пространственно-временных операторов, которые изменяют пространственно-временную структуру седеонной волновой функции $\tilde{\boldsymbol{\psi}}$ посредством перестановки ее компонент. Рассмотрим, например, действие оператора $\mathbf{a}_3$. Для этого запишем волновую функцию в базисе $\mathbf{a_m}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}\mathbf{a}_1+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{3}\mathbf{a}_3\,, \qquad (9.3)$$

тогда действие оператора $\mathbf{a}_3$ сводится к следующему:

$$\mathbf{a}_3\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\boldsymbol{\psi}_\mathbf{3}-i\boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}\mathbf{a}_1+i\boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}\mathbf{a}_3\,. \qquad (9.4)$$

Найдем собственные функции оператора $\mathbf{a}_3$. Для этого решим уравнение на собственные функции и собственные значения:

$$\mathbf{a}_3\tilde{\boldsymbol{\psi}}=\lambda\tilde{\boldsymbol{\psi}}\,.$$

Здесь λ – число, в общем случае комплексное. В развернутом виде получаем:

$$\boldsymbol{\psi}_\mathbf{3}-i\boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}\mathbf{a}_1+i\boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}\mathbf{a}_3=\lambda(\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{1}\mathbf{a}_1+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{2}\mathbf{a}_2+\boldsymbol{\psi}_\mathbf{3}\mathbf{a}_3)\,. \qquad (9.5)$$

Отсюда имеем систему уравнений

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_3 &= \lambda\boldsymbol{\psi}_0,\\ -i\boldsymbol{\psi}_2 &= \lambda\boldsymbol{\psi}_1,\\ i\boldsymbol{\psi}_1 &= \lambda\boldsymbol{\psi}_2,\\ \boldsymbol{\psi}_0 &= \lambda\boldsymbol{\psi}_3,\end{aligned} \tag{9.6}$$

из которой следует

$$\begin{aligned}&\lambda^2 = 1,\\ &\boldsymbol{\psi}_0 = \lambda\boldsymbol{\psi}_3,\\ &\boldsymbol{\psi}_2 = i\lambda\boldsymbol{\psi}_1.\end{aligned} \tag{9.7}$$

Таким образом, собственные значения оператора $\mathbf{a}_3$ равны $\lambda = \pm 1$, и собственные функции оператора $\mathbf{a}_3$ можно записать в следующей форме:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \left(1 + \lambda\mathbf{a}_3\right)\boldsymbol{\psi}_a + \left(\mathbf{a}_1 + \lambda i\mathbf{a}_2\right)\boldsymbol{\psi}_b, \tag{9.8}$$

где $\boldsymbol{\psi}_a$ и $\boldsymbol{\psi}_b$ – произвольные седеон-скаляры. За элементарные собственные функции можно выбрать следующие комбинации элементов седеонного базиса:

$$\begin{aligned}&\left(1 + \lambda\mathbf{a}_3\right),\\ &\left(\mathbf{a}_1 + \lambda i\mathbf{a}_2\right).\end{aligned} \tag{9.9}$$

Седеонное волновое уравнение (9.1) допускает полевую интерпретацию. Введем для упрощения выкладок следующие операторы:

$$\begin{aligned}&\partial = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t},\\ &\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{a}_1 + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{a}_2 + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{a}_3,\\ &m = \frac{m_0 c}{\hbar}.\end{aligned} \tag{9.10}$$

Тогда волновое уравнение (9.1) принимает вид

$$\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \tag{9.11}$$

Рассмотрим последовательное действие операторов в левой части (9.11). После действия первого оператора получаем

$$\begin{aligned}\left(i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla} - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} &= i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial\boldsymbol{\psi}_0 + i\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\partial\vec{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\boldsymbol{\psi}_0 - \\ &- \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right) - i\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{\psi}}\right] - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\boldsymbol{\psi}_0 - i\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}m\vec{\boldsymbol{\psi}}.\end{aligned} \tag{9.12}$$

Введем скалярные и векторные напряженности полей

$$\mathbf{U_0} = i\mathbf{e_t}\partial\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0} - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{\psi}}\right) - i\mathbf{e_{tr}}m\,\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0}, \tag{9.13}$$

$$\vec{\mathbf{U}} = i\mathbf{e_t}\partial\vec{\boldsymbol{\psi}} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\boldsymbol{\psi}_\mathbf{0} - i\mathbf{e_r}\left[\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{\psi}}\right] - i\mathbf{e_{tr}}m\vec{\boldsymbol{\psi}}\,. \tag{9.14}$$

Тогда соотношение (9.12) можно представить в виде

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{U_0} + \vec{\mathbf{U}}, \tag{9.15}$$

и волновое уравнение (9.11) принимает форму

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(\mathbf{U_0} + \vec{\mathbf{U}}\right) = 0\,. \tag{9.16}$$

Производя действие оператора в (9.16) и разделяя седеон-скалярную и седеон-векторную части, получаем систему уравнений первого порядка, аналогичную уравнениям Максвелла:

$$\begin{gathered} i\mathbf{e_t}\partial\mathbf{U_0} - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{U}}\right) - i\mathbf{e_{tr}}m\,\mathbf{U_0} = 0, \\ i\mathbf{e_t}\partial\vec{\mathbf{U}} - i\mathbf{e_r}\left[\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{U}}\right] - \mathbf{e_r}\vec{\nabla}\mathbf{U_0} - i\mathbf{e_{tr}}m\,\vec{\mathbf{U}} = 0. \end{gathered} \tag{9.17}$$

В качестве примера рассмотрим седеонную волновую функцию в форме (8.7)

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = i\varphi_1\mathbf{e_t} - i\varphi_2\mathbf{e_r} + \varphi_3 - i\varphi_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{\phi}_1\mathbf{e_r} + \vec{\phi}_2\mathbf{e_t} - \vec{\phi}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{\phi}_4\,, \tag{9.18}$$

где компоненты φ_s и $\vec{\phi}_s$ являются действительными функциями координат и времени. Здесь и далее индекс $s = 1, 2, 3, 4$. Перемножая операторы в левой части уравнения (9.11), получаем следующие волновые уравнения для компонент волновой функции:

$$\begin{gathered} \left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\varphi_s = 0, \\ \left(\partial^2 - \Delta + m^2\right)\vec{\phi}_s = 0. \end{gathered} \tag{9.19}$$

Введем скалярные u_s и векторные $\vec{U}_s$ напряженности поля согласно следующим определениям:

$$
\begin{aligned}
&u_1 = \partial\varphi_1 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_1\right) + m\varphi_4,\\
&u_2 = \partial\varphi_2 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_2\right) - m\varphi_3,\\
&u_3 = \partial\varphi_3 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_3\right) + ma_2,\\
&u_4 = \partial\varphi_4 + \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\phi}_4\right) - m\varphi_1,\\
&\vec{U}_1 = -\partial\vec{\phi}_1 - \vec{\nabla}\varphi_1 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{\phi}_2\right] + m\vec{\phi}_4,\\
&\vec{U}_2 = -\partial\vec{\phi}_2 - \vec{\nabla}\varphi_2 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{\phi}_1\right] - m\vec{\phi}_3,\\
&\vec{U}_3 = -\partial\vec{\phi}_3 - \vec{\nabla}\varphi_3 + \left[\vec{\nabla}\times\vec{\phi}_4\right] + m\vec{\phi}_2,\\
&\vec{U}_4 = -\partial\vec{\phi}_4 - \vec{\nabla}\varphi_4 - \left[\vec{\nabla}\times\vec{\phi}_3\right] - m\vec{\phi}_1.
\end{aligned}
\tag{9.20}
$$

Определения напряженностей поля (9.20) обладают специфической инвариантностью. Нетрудно проверить, что u_s и $\vec{U}_s$ не изменяются при следующих заменах:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 + \partial\varepsilon_1 - m\varepsilon_4,\\
&\varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 + \partial\varepsilon_2 + m\varepsilon_3,\\
&\varphi_3 \Rightarrow \varphi_3 + \partial\varepsilon_3 - m\varepsilon_2,\\
&\varphi_4 \Rightarrow \varphi_4 + \partial\varepsilon_4 + m\varepsilon_1,\\
&\vec{\phi}_1 \Rightarrow \vec{\phi}_1 - \vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{\phi}_2 \Rightarrow \vec{\phi}_2 - \vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{\phi}_3 \Rightarrow \vec{\phi}_3 - \vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{\phi}_4 \Rightarrow \vec{\phi}_4 - \vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned}
\tag{9.21}
$$

Здесь ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 являются произвольными скалярными функциями, удовлетворяющими однородному волновому уравнению Клейна–Гордона. Принимая во внимание (9.20), мы получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} - i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\varphi_1\mathbf{e_t} - i\varphi_2\mathbf{e_r} + \varphi_3 - i\varphi_4\mathbf{e_{tr}} + \vec{\phi}_1\mathbf{e_r} + \vec{\phi}_2\mathbf{e_t} - \vec{\phi}_3\mathbf{e_{tr}} + i\vec{\phi}_4\right) =\\
&= -u_1 + iu_2\mathbf{e_{tr}} + iu_3\mathbf{e_t} - iu_4\mathbf{e_r} + \vec{U}_1\mathbf{e_{tr}} - i\vec{U}_2 + \vec{U}_3\mathbf{e_r} + \vec{U}_4\mathbf{e_t},
\end{aligned}
\tag{9.22}
$$

и исходное волновое уравнение (9.11) может быть записано в следующей форме:

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(-u_1+iu_2\mathbf{e_{tr}}+iu_3\mathbf{e_t}-iu_4\mathbf{e_r}+\vec{U}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{U}_2+\vec{U}_3\mathbf{e_r}+\vec{U}_4\mathbf{e_t}\right)=0\,. \quad (9.23)$$

Производя действие оператора в левой части уравнения (9.23) и разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, мы получаем симметричную систему уравнений для напряженностей поля, аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике:

$$\begin{aligned}
&\partial u_1+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_1\right)-mu_4=0\,,\\
&\partial u_2+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_2\right)+mu_3=0,\\
&\partial u_3+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_3\right)-mu_2=0,\\
&\partial u_4+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_4\right)+mu_1=0,\\
&\partial\vec{U}_1+\vec{\nabla}u_1-\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_2\right]+m\vec{U}_4=0,\\
&\partial\vec{U}_2+\vec{\nabla}u_2+\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_1\right]-m\vec{U}_3=0,\\
&\partial\vec{U}_3+\vec{\nabla}u_3+\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_4\right]+m\vec{U}_2=0,\\
&\partial\vec{U}_4+\vec{\nabla}u_4-\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_3\right]-m\vec{U}_1=0.
\end{aligned} \qquad (9.24)$$

Система (9.24) также инвариантна по отношению к следующим подстановкам:

$$\begin{aligned}
&u_1\Rightarrow u_1+\partial\varepsilon_1-m\varepsilon_4,\\
&u_2\Rightarrow u_2-\partial\varepsilon_2-m\varepsilon_3,\\
&u_3\Rightarrow u_3+\partial\varepsilon_3-m\varepsilon_2,\\
&u_4\Rightarrow u_4-\partial\varepsilon_4-m\varepsilon_1,\\
&\vec{U}_1\Rightarrow\vec{U}_1-\vec{\nabla}\varepsilon_1,\\
&\vec{U}_2\Rightarrow\vec{U}_2+\vec{\nabla}\varepsilon_2,\\
&\vec{U}_3\Rightarrow\vec{U}_3-\vec{\nabla}\varepsilon_3,\\
&\vec{U}_4\Rightarrow\vec{U}_4+\vec{\nabla}\varepsilon_4.
\end{aligned} \qquad (9.25)$$

Умножая каждое из уравнений (9.24) на соответствующую напряженность поля и складывая полученные уравнения, имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+\vec{U}_1^2+\vec{U}_2^2+\vec{U}_3^2+\vec{U}_4^2\right)+\\
&+u_1\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_1\right)+u_2\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_2\right)+u_3\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_3\right)+u_4\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{U}_4\right)+\\
&+\left(\vec{U}_1\cdot\vec{\nabla}u_1\right)+\left(\vec{U}_2\cdot\vec{\nabla}u_2\right)+\left(\vec{U}_3\cdot\vec{\nabla}u_3\right)+\left(\vec{U}_4\cdot\vec{\nabla}u_4\right)-\\
&-\left(\vec{U}_1\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_2\right]\right)+\left(\vec{U}_2\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_1\right]\right)+\\
&+\left(\vec{U}_3\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_4\right]\right)-\left(\vec{U}_4\cdot\left[\vec{\nabla}\times\vec{U}_3\right]\right)=0.
\end{aligned}\qquad(9.26)$$

Это выражение является аналогом теоремы Пойнтинга для квантового поля. Величина

$$w=\frac{1}{8\pi}\left(u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+\vec{U}_1^2+\vec{U}_2^2+\vec{U}_3^2+\vec{U}_4^2\right)\qquad(9.27)$$

является аналогом плотности энергии (но это не плотность энергии), в то время как величина

$$\vec{p}=\frac{c}{4\pi}\left(u_1\vec{U}_1+u_2\vec{U}_2+u_3\vec{U}_3+u_4\vec{U}_4+\left[\vec{U}_1\times\vec{U}_2\right]-\left[\vec{U}_3\times\vec{U}_4\right]\right)\qquad(9.28)$$

является аналогом плотности потока энергии поля (но это не плотность потока энергии).

С другой стороны, применяя оператор

$$\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)$$

к уравнению (9.23), получаем следующее волновое уравнение для напряженностей поля:

$$\begin{aligned}
&\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\left(i\mathbf{e_t}\partial-\mathbf{e_r}\vec{\nabla}-i\mathbf{e_{tr}}m\right)\times\\
&\times\left(-u_1+iu_2\mathbf{e_{tr}}+iu_3\mathbf{e_t}-iu_4\mathbf{e_r}+\vec{U}_1\mathbf{e_{tr}}-i\vec{U}_2+\vec{U}_3\mathbf{e_r}+\vec{U}_4\mathbf{e_t}\right)=0.
\end{aligned}\qquad(9.29)$$

Разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем волновые уравнения для компонент u_S и $\vec{U}_S$:

$$\begin{aligned}
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)u_S=0,\\
&\left(\partial^2-\Delta+m^2\right)\vec{U}_S=0.
\end{aligned}\qquad(9.30)$$

9.2. Седеонные уравнения для частицы во внешних полях

Для описания частицы во внешнем электромагнитном и слабом гравитационном поле в уравнениях должна быть произведена следующая замена операторов:

$$\begin{aligned} &\partial \to \partial + \frac{i}{\hbar c}\left(q_e\varphi_e - q_g\varphi_g\right), \\ &\vec{\nabla} \to \vec{\nabla} - \frac{i}{\hbar c}\left(q_e\vec{A}_e - q_g\vec{A}_g\right). \end{aligned} \tag{9.31}$$

Тогда, вводя новые величины

$$\begin{aligned} q'_e &= \frac{i}{\hbar c} q_e, \\ q'_g &= \frac{i}{\hbar c} q_g, \end{aligned} \tag{9.32}$$

мы приходим к волновому уравнению, описывающему взаимодействие частицы с полями

$$\begin{gathered} \left\{ i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right) - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right) - i\mathbf{e_{tr}}m \right\} \times \\ \times \left\{ i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right) - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right) - i\mathbf{e_{tr}}m \right\} \tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \end{gathered} \tag{9.33}$$

По аналогии с (9.15) можно ввести следующие скалярные и векторные напряженности поля

$$\mathbf{U_0} + \vec{\mathbf{U}} = \left\{ i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right) - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right) - i\mathbf{e_{tr}}m \right\} \tilde{\boldsymbol{\psi}}. \tag{9.34}$$

Тогда волновое уравнение (9.33) принимает вид

$$\left\{ i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right) - \mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right) - i\mathbf{e_{tr}}m \right\}\left(\mathbf{U_0} + \vec{\mathbf{U}}\right) = 0. \tag{9.35}$$

Соответствующая ему система уравнений Максвелла имеет вид

$$\begin{aligned} &i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right)\mathbf{U_0} - \mathbf{e_r}\left(\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right)\cdot\vec{\mathbf{U}}\right) - i\mathbf{e_{tr}}m\,\mathbf{U_0} = 0, \\ &i\mathbf{e_t}\left(\partial + q'_e\varphi_e - q'_g\varphi_g\right)\vec{\mathbf{U}} - i\mathbf{e_r}\left[\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right)\times\vec{\mathbf{U}}\right] - \\ &-\mathbf{e_r}\left(\vec{\nabla} - q'_e\vec{A}_e + q'_g\vec{A}_g\right)\mathbf{U_0} - i\mathbf{e_{tr}}m\,\vec{\mathbf{U}} = 0. \end{aligned} \tag{9.36}$$

Для волновой функции, задаваемой выражением (9.18), скалярные и векторные напряженности поля (9.34) выражаются следующим образом:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \partial^* \varphi_1 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\phi}_1\right) + m\varphi_4, \\
u_2 &= \partial^* \varphi_2 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\phi}_2\right) - m\varphi_3, \\
u_3 &= \partial^* \varphi_3 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\phi}_3\right) + ma_2, \\
u_4 &= \partial^* \varphi_4 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{\phi}_4\right) - m\varphi_1, \\
\vec{U}_1 &= -\partial^* \vec{\phi}_1 - \vec{\nabla}^* \varphi_1 - \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{\phi}_2\right] + m\vec{\phi}_4, \\
\vec{U}_2 &= -\partial^* \vec{\phi}_2 - \vec{\nabla}^* \varphi_2 + \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{\phi}_1\right] - m\vec{\phi}_3, \\
\vec{U}_3 &= -\partial^* \vec{\phi}_3 - \vec{\nabla}^* \varphi_3 + \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{\phi}_4\right] + m\vec{\phi}_2, \\
\vec{U}_4 &= -\partial^* \vec{\phi}_4 - \vec{\nabla}^* \varphi_4 - \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{\phi}_3\right] - m\vec{\phi}_1.
\end{aligned}
\tag{9.37}
$$

Здесь введены новые операторы:

$$
\begin{aligned}
\partial^* &= \partial + q'_e \varphi_e - q'_g \varphi_g, \\
\vec{\nabla}^* &= \vec{\nabla} - q'_e \vec{A}_e + q'_g \vec{A}_g.
\end{aligned}
\tag{9.38}
$$

Соответственно, система уравнений Максвелла для напряженностей поля имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\partial^* u_1 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}_1\right) - mu_4 = 0, \\
&\partial^* u_2 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}_2\right) + mu_3 = 0, \\
&\partial^* u_3 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}_3\right) - mu_2 = 0, \\
&\partial^* u_4 + \left(\vec{\nabla}^* \cdot \vec{U}_4\right) + mu_1 = 0, \\
&\partial^* \vec{U}_1 + \vec{\nabla}^* u_1 - \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{U}_2\right] + m\vec{U}_4 = 0, \\
&\partial^* \vec{U}_2 + \vec{\nabla}^* u_2 + \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{U}_1\right] - m\vec{U}_3 = 0, \\
&\partial^* \vec{U}_3 + \vec{\nabla}^* u_3 + \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{U}_4\right] + m\vec{U}_2 = 0, \\
&\partial^* \vec{U}_4 + \vec{\nabla}^* u_4 - \left[\vec{\nabla}^* \times \vec{U}_3\right] - m\vec{U}_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{9.39}
$$

В следующем разделе мы рассмотрим в качестве примера задачу о релятивистской частице во внешнем однородном магнитном поле.

9.3. Релятивистская частица в однородном магнитном поле

Рассмотрим релятивистскую частицу с электрическим зарядом q_e во внешнем однородном магнитном поле. Пусть вектор напряженности магнитного поля направлен вдоль оси Z:

$$\vec{H} = H\,\mathbf{a}_3. \tag{9.40}$$

Здесь H – модуль вектора $\vec{H}$. Выберем векторный потенциал в калибровке $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=0$ в представлении Ландау:

$$\vec{A} = A_2\mathbf{a}_2 = H\,x\mathbf{a}_2\,. \tag{9.41}$$

Тогда седеонное уравнение для релятивистской частицы (9.33) запишется следующим образом:

$$\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} + \frac{2i}{\hbar c}q_e H\;x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{q_e^{\,2}H^{\,2}}{\hbar^2c^2}x^2 - \frac{q_e\vec{H}}{\hbar c}\right\}\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0\,. \tag{9.42}$$

В уравнении (9.42) последнее слагаемое $q_e\vec{H}/(\hbar c)$ представляет собой векторный оператор, действие которого сводится к преобразованию седеонного базиса волновой функции. Для стационарных состояний с энергией E получаем:

$$\left[-\Delta + \frac{2i}{\hbar c}q_e H\;x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} + \frac{q_e^{\,2}H^{\,2}}{\hbar^2c^2}x^2 - \frac{q_e H}{\hbar c}\mathbf{a}_3\right]\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \frac{E^2}{\hbar^2c^2}\tilde{\boldsymbol{\psi}}\,. \tag{9.43}$$

Данное уравнение можно рассматривать как уравнение на собственные значения и собственные функции оператора, стоящего в левой части. Поскольку данный оператор коммутирует с операторами $\hat{p}_y$ и $\hat{p}_z$, то он имеет общую с ними систему собственных функций. Поэтому будем искать решение уравнения (9.43) в виде

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(p_y y + p_z z\right)\right\}, \tag{9.44}$$

где p_y и p_z являются интегралами движения, а $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(x)$ – произвольная седеонная функция. Подставляя (9.44) в (9.43), получаем

$$\left[\frac{p_y^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2}{\hbar^2} + \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2p_y}{\hbar^2 c}q_e H\,x + \frac{q_e^{\,2}H^{\,2}}{\hbar^2c^2}x^2 - \frac{q_e H}{\hbar c}\mathbf{a}_3\right]\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{E^2}{\hbar^2c^2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}\,. \tag{9.45}$$

Заметим, что оператор в левой части уравнения (9.45) коммутирует с оператором $\mathbf{a_3}$, поэтому будем искать решение уравнения (9.45) в виде линейной комбинации собственных функций оператора $\mathbf{a_3}$ (см. (9.9)):

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \left(1 + \lambda \mathbf{a_3}\right) \mathbf{F}_1^{(\lambda)}(x) + \left(\mathbf{a_1} + \lambda i \mathbf{a_2}\right) \mathbf{F}_2^{(\lambda)}(x)\,, \tag{9.46}$$

где $\mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}(x)$ ($\gamma = 1,\ 2$) – произвольные седеон-скалярные функции. Тогда оператор в левой части уравнения (9.45) становится скалярным, и уравнение приобретает вид

$$\left\{ \frac{p_y^2}{\hbar^2} + \frac{p_z^2}{\hbar^2} + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{2 p_y}{\hbar^2 c} q_e H\, x + \frac{q_e^{\,2} H^{\,2}}{\hbar^2 c^2} x^2 - \lambda \frac{q_e H}{\hbar c} \right\} \mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)} = \frac{E^2}{\hbar^2 c^2} \mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}\,. \tag{9.47}$$

После стандартных алгебраических преобразований данное уравнение приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)}}{\partial x^2} + \left[\left(\frac{E^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{p_z^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} + \lambda \frac{q_e H}{\hbar c} \right) - \left(\frac{q_e H}{\hbar c} \right)^2 \left(x - \frac{c p_y}{q_e H} \right)^2 \right] \mathbf{F}_\gamma^{(\lambda)} = 0\,. \tag{9.48}$$

Это уравнение линейного осциллятора [45]. Множество значений энергии частицы определяется следующим соотношением:

$$E_{n,\lambda}^2 = m_0^2 c^4 + p_z^2 c^2 + |\,q_e\,|\, H \hbar c \left(2n+1\right) - \lambda q_e H \hbar c\,. \tag{9.49}$$

Данный спектр энергий идентичен спектру для частиц со спином 1/2, получаемому из рассмотрения релятивистского спинорного уравнения Дирака [45].

9.4. Релятивистское уравнение первого порядка

Рассмотрим частицы, которые описываются волновым уравнением первого порядка:

$$\left(i \mathbf{e_t} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r} \vec{\nabla} - i \mathbf{e_{tr}} \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0\,. \tag{9.50}$$

Найдем решение данного уравнения в виде плоской волны с частотой ω и волновым вектором $\vec{k}$. Зависимость частоты от волнового вектора имеет две ветви:

$$\omega_\pm = \pm \sqrt{c^2 \vec{k}^{\,2} + \frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}\,. \tag{9.51}$$

Общее решение уравнения (9.50) имеет вид:

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}} = \left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_\pm}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \exp\left\{ -i\omega_\pm t + i\left(\vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right\}, \qquad (9.52)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ – произвольный седеон с постоянными компонентами, не зависящими от пространственных координат и времени. Непосредственная подстановка (9.52) в (9.50) показывает, что волновая функция (9.52) действительно является решением, поскольку выражение в круглых скобках представляет собой седеонный делитель нуля:

$$\left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_\pm}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \left(\mathbf{e}_1 \frac{\omega_\pm}{c} - i\mathbf{e}_2 \vec{k} - i\mathbf{e}_3 \frac{m_0 c}{\hbar} \right) \equiv 0 . \qquad (9.53)$$

9.5. Выводы

Можно сделать некоторые общие утверждения относительно вида волновой функции частицы в стационарном состоянии, соответствующем определенным собственным значениям оператора $\mathbf{a}_3$. В стационарном состоянии с энергией E волновая функция имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r},t) = \tilde{\boldsymbol{\psi}}(\vec{r}) e^{-i\omega t} , \qquad (9.54)$$

где частота $\omega = E/\hbar$. В состояниях, соответствующих определенным собственным значениям оператора $\mathbf{a}_3$, пространственная часть волновой функции может быть представлена в виде (9.45), так что

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_\lambda(\vec{r},t) = \left\{ \left(1 + \lambda \mathbf{a}_3\right) \mathbf{F}_1^{(\lambda)}(\vec{r}) + \left(\mathbf{a}_1 + \lambda i \mathbf{a}_2 \right) \mathbf{F}_2^{(\lambda)}(\vec{r}) \right\} e^{-i\omega t} . \qquad (9.55)$$

Данная функция имеет достаточно ясную геометрическую структуру. Действительная и мнимая части компоненты $\left(1 + \lambda \mathbf{a}_3\right) e^{-i\omega t}$ являются комбинацией абсолютного скаляра и абсолютного вектора, параллельного оси *Z*, осциллирующих с частотой ω. Разность фаз между скалярной и векторной компонентами равна 0 в случае $\lambda = 1$ или π в случае $\lambda = -1$. С другой стороны, действительная и мнимая части компоненты $\left(\boldsymbol{a}_1 + \lambda i \boldsymbol{a}_2\right) e^{-i\omega t}$ имеют форму вектора, вращающегося с частотой ω в плоскости, перпендикулярной оси *Z*. Направление вращения зависит от знака λ.

При этом конкретная пространственно-временная структура волновой функции определяется частным видом седеон-скалярных функций $\mathbf{F}_1^{(\lambda)}(\vec{r})$ и $\mathbf{F}_2^{(\lambda)}(\vec{r})$.

Таким образом, в стационарном состоянии с энергией E волновая функция частицы с определенной проекцией спина имеет структуру седеонного осциллятора с линейной продольной (по отношению к направлению спина) и круговой перпендикулярной компонентами.

Приложение 1

Матричное представление седеонов

Рассмотрим матричное представление седеонов. В общем виде седеон представляет собой матрицу размером 16×16. Работа с такой матрицей крайне затруднена из-за ее большой размерности. Однако для нее возможны компактные представления в виде блочных матриц размером 4×4. Рассмотрим седеон $\tilde{\mathbf{V}}$, записанный в базисе $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0}\bar{\mathbf{V}}_0 + \mathbf{e_1}\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e_2}\bar{\mathbf{V}}_2 + \mathbf{e_3}\bar{\mathbf{V}}_3 . \qquad (\text{П } 1.1)$$

Седеонное произведение элемента $\mathbf{e_1}$ и седеона $\tilde{\mathbf{V}}$ равно

$$\mathbf{e_1}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{e_0}\bar{\mathbf{V}}_1 + \mathbf{e_1}\bar{\mathbf{V}}_0 - i\mathbf{e_2}\bar{\mathbf{V}}_3 + i\mathbf{e_3}\bar{\mathbf{V}}_2 , \qquad (\text{П } 1.2)$$

и поэтому седеонная единица $\mathbf{e_1}$ может быть представлена следующей матрицей, действующей в пространстве с базисом $\mathbf{e_0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$:

$$\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.3)$$

По аналогии имеем:

$$\mathbf{e_0} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.4)$$

Таким образом, используя (П 1.3) и (П 1.4), мы можем переписать седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ (в базисе $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) в следующей матричной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{V}}_0 & \bar{\mathbf{V}}_1 & \bar{\mathbf{V}}_2 & \bar{\mathbf{V}}_3 \\ \bar{\mathbf{V}}_1 & \bar{\mathbf{V}}_0 & -i\bar{\mathbf{V}}_3 & i\bar{\mathbf{V}}_2 \\ \bar{\mathbf{V}}_2 & i\bar{\mathbf{V}}_3 & \bar{\mathbf{V}}_0 & -i\bar{\mathbf{V}}_1 \\ \bar{\mathbf{V}}_3 & -i\bar{\mathbf{V}}V_2 & i\bar{\mathbf{V}}_1 & \bar{\mathbf{V}}_0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.5)$$

С другой стороны, седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ записывается в базисе $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в следующей скалярно-векторной форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_0\mathbf{a_0} + \mathbf{V}_1\mathbf{a_1} + \mathbf{V}_2\mathbf{a_2} + \mathbf{V}_3\mathbf{a_3}\,. \qquad (\text{П } 1.6)$$

Тогда, действуя аналогичным образом, мы получаем, что базисные элементы $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ имеют следующее матричное представление:

$$\mathbf{a_0} = 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.7)$$

Используя (П 1.7), седеон $\tilde{\mathbf{V}}$ можно записать в базисе $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в виде следующей матрицы размерности 4×4:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_0 & \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_2 & \mathbf{V}_3 \\ \mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_0 & -i\mathbf{V}_3 & i\mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_2 & i\mathbf{V}_3 & \mathbf{V}_0 & -i\mathbf{V}_1 \\ \mathbf{V}_3 & -i\mathbf{V}_2 & i\mathbf{V}_1 & \mathbf{V}_0 \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.8)$$

Таким образом, шестнадцатикомпонентный седеон может быть представлен в виде матрицы 16×16, которая допускает два различных компактных представления в виде блочных матриц 4×4. Первое представление в базисе $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ дается выражением (П 1.5) с компонентами $\bar{\mathbf{V}}_\alpha$ (в базисе $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$), равными

$$\bar{\mathbf{V}}_\alpha = \begin{pmatrix} V_{\alpha 0} & V_{\alpha 1} & V_{\alpha 2} & V_{\alpha 3} \\ V_{\alpha 1} & V_{\alpha 0} & -iV_{\alpha 3} & iV_{\alpha 2} \\ V_{\alpha 2} & iV_{\alpha 3} & V_{\alpha 0} & -iV_{\alpha 1} \\ V_{\alpha 3} & -iV_{\alpha 2} & iV_{\alpha 1} & V_{\alpha 0} \end{pmatrix}. \qquad (\text{П } 1.9)$$

Второе представление в базисе $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ дается выражением (П 1.8) с компонентами $\mathbf{V}_\beta$ (в базисе $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$), равными

$$\mathbf{V}_\beta = \begin{pmatrix} V_{0\beta} & V_{1\beta} & V_{2\beta} & V_{3\beta} \\ V_{1\beta} & V_{0\beta} & -iV_{3\beta} & iV_{2\beta} \\ V_{2\beta} & iV_{3\beta} & V_{0\beta} & -iV_{1\beta} \\ V_{3\beta} & -iV_{2\beta} & iV_{1\beta} & V_{0\beta} \end{pmatrix}. \qquad (\Pi\ 1.10)$$

Рассмотрим соотношения между элементами векторного базиса $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ и матрицами Дирака. Вводя новые величины

$$\mathbf{W}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_3),\ \mathbf{W}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 + i\mathbf{V}_2),$$

$$\mathbf{W}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_1 - i\mathbf{V}_2),\ \mathbf{W}_4 = \frac{1}{2}(\mathbf{V}_0 - \mathbf{V}_3), \qquad (\Pi\ 1.11)$$

мы можем переписать седеон (П 1.6) в базисе собственных функций оператора $\mathbf{a_3}$ в следующей форме:

$$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_1(1+\mathbf{a_3}) + \mathbf{W}_2(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_4(1-\mathbf{a_3}), \qquad (\Pi\ 1.12)$$

где величины

$$(1+\mathbf{a_3}),\ (\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}),\ (\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}),\ (1-\mathbf{a_3}) \qquad (\Pi\ 1.13)$$

представляют собой новый седеонный базис. Тогда действие векторных операторов $\mathbf{a_m}$ сводится к выражениям

$$\mathbf{a_1}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_2(1+\mathbf{a_3}) + \mathbf{W}_1(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_4(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(1-\mathbf{a_3}),$$

$$\mathbf{a_2}\tilde{\mathbf{V}} = -i\mathbf{W}_2(1+\mathbf{a_3}) + i\mathbf{W}_1(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) - i\mathbf{W}_4(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) + i\mathbf{W}_3(1-\mathbf{a_3}), \qquad (\Pi\ 1.14)$$

$$\mathbf{a_3}\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W}_1(1+\mathbf{a_3}) - \mathbf{W}_2(\mathbf{a_1} - i\mathbf{a_2}) + \mathbf{W}_3(\mathbf{a_1} + i\mathbf{a_2}) - \mathbf{W}_4(1-\mathbf{a_3}).$$

На основании формул (П 1.14) единичные векторы $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ могут быть представлены в базисе (П 1.13) матрицами 4×4 следующего вида:

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (\Pi\ 1.15)$$

которые совпадают со спиновыми операторами теории Дирака [27]:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{П } 1.16)$$

Таким образом, матричные операторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{a}_\beta$, вообще говоря, представляются матрицами 16 × 16. Представление их матрицами 4 × 4 относится лишь к конкретным базисам и может быть использовано только в тех случаях, когда операторы $\mathbf{e}_\alpha$ и $\mathbf{a}_\beta$ действуют раздельно и независимо.

Приложение 2

Пространственно-временные седенионы

Известные в литературе шестнадцатикомпонентные гиперкомплексные числа седенионы получаются из восьмикомпонентных октонионов посредством процедуры удвоения Кэли–Диксона [55]. В этом случае гиперкомплексный седенион определяется следующим образом:

$$S = O_1 + O_2\boldsymbol{e}\,, \tag{П 2.1}$$

где O_i является октонионом, а параметр удвоения $\boldsymbol{e}$ аналогичен мнимой единице ($\boldsymbol{e}^2 = -1$). Алгебра седенионов имеет специфические правила умножения. Так, произведение двух седенионов

$$S_1 = O_{11} + O_{12}\boldsymbol{e}\,,$$
$$S_2 = O_{21} + O_{22}\boldsymbol{e}$$

определяется следующим образом:

$$S_1S_2 = \left(O_{11} + O_{12}\boldsymbol{e}\right)\left(O_{21} + O_{22}\boldsymbol{e}\right) = \left(O_{11}O_{21} - \bar{O}_{22}O_{12}\right) + \left(O_{22}O_{11} + O_{12}\bar{O}_{21}\right)\boldsymbol{e}\,, \tag{П 2.2}$$

где $\bar{O}_i$ – сопряженный октонион. Умножение (П 2.2) позволяет ввести хорошо определенную норму седениона, равную сумме квадратов его компонент. Однако такая процедура конструирования приводит к тому, что полученные седенионы образуют нормированную, но неассоциативную алгебру [4]. Это существенно усложняет использование седенионов Кэли–Диксона в физических приложениях.

В данном разделе мы рассмотрим альтернативную версию шестнадцатикомпонентных гиперкомплексных чисел, называемых “пространственно-временные седенионы” [58], которые образуют ассоциативную алгебру.

П 2.1. Алгебра пространственно-временных седенионов

Как известно, кватернион представляет собой четырехкомпонентный объект следующего вида:

$$\hat{q} = q_0\mathbf{a_0} + q_1\mathbf{a_1} + q_2\mathbf{a_2} + q_3\mathbf{a_3}\,, \tag{П 2.3}$$

где компоненты $q_\alpha\,(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ – числа (в общем случае комплексные), $\mathbf{a}_0 \equiv 1$ является скалярной единицей, а величины $\mathbf{a}_\mathrm{m}\ (\mathrm{m} = 1, 2, 3)$ представляют собой кватернионные единицы, которые интерпретируются как единичные векторы. Правила умножения и коммутации кватернионных единиц $\mathbf{a}_\mathrm{m}$ представлены в табл. 9. По аналогии с седеонами мы введем также пространственно-временной скалярный базис $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, который будет отвечать за пространственно-временные инверсии. Здесь $\mathbf{e}_0 \equiv 1$ – абсолютный скаляр, $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{t}$ – временная скалярная единица, $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{r}$ – пространственная скалярная единица, $\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{e}_\mathbf{tr}$ – пространственно-временная скалярная единица. Правила умножения и коммутации пространственно-временных единиц $\mathbf{e}_\mathrm{m}$ выберем также в соответствии с правилами умножения кватернионных единиц (представлены в табл. 10).

Заметим, что седенионные единицы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ образуют антикоммутативные алгебры:

$$\begin{gathered} \mathbf{a_n a_m} = -\mathbf{a_m a_n}, \\ \mathbf{e_n e_m} = -\mathbf{e_m e_n} \end{gathered} \tag{П 2.4}$$

для $\mathbf{n} \neq \mathbf{m}$. Однако элементы базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ коммутируют с элементами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$:

$$\mathbf{e_n a_m} = \mathbf{a_m e_n} \tag{П 2.5}$$

для любых $\mathbf{n}$ и $\mathbf{m}$.

Таблица 9. Правила умножения единиц $\mathbf{a_n}$

	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$
$\mathbf{a}_1$	-1	$\mathbf{a}_3$	$-\mathbf{a}_2$
$\mathbf{a}_2$	$-\mathbf{a}_3$	-1	$\mathbf{a}_1$
$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_2$	$-\mathbf{a}_1$	-1

Таблица 10. Правила умножения единиц $\mathbf{e_n}$

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1

Седенион $\tilde{\boldsymbol{V}}$ может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{V}} &= \mathbf{e_0}\left(V_{00}\mathbf{a_0} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\right) + \\ &+ \mathbf{e_1}\left(V_{10}\mathbf{a_0} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\right) + \\ &+ \mathbf{e_2}\left(V_{20}\mathbf{a_0} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\right) + \\ &+ \mathbf{e_3}\left(V_{30}\mathbf{a_0} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\right).\end{aligned} \tag{П 2.6}$$

Также можно ввести седенионные компоненты согласно следующим определениям:

$$\begin{aligned}&V = \mathbf{e_0}V_{00}\mathbf{a_0}\,, \\ &\vec{V} = \mathbf{e_0}\left(V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\right), \\ &V_{\mathbf{t}} \equiv V_{\mathbf{1}} = \mathbf{e_1}V_{10}\mathbf{a_0}\,, \\ &\vec{V}_{\mathbf{t}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{1}} = \mathbf{e_1}\left(V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\right), \\ &V_{\mathbf{r}} \equiv V_{\mathbf{2}} = \mathbf{e_2}V_{20}\mathbf{a_0}\,, \\ &\vec{V}_{\mathbf{r}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{2}} = \mathbf{e_2}\left(V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\right), \\ &V_{\mathbf{tr}} \equiv V_{\mathbf{3}} = \mathbf{e_3}V_{30}\mathbf{a_0}\,, \\ &\vec{V}_{\mathbf{tr}} \equiv \vec{V}_{\mathbf{3}} = \mathbf{e_3}\left(V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\right).\end{aligned} \tag{П 2.7}$$

Тогда седенион представляется в виде

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = V + \vec{V} + V_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + V_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + V_{\mathbf{tr}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}}\,. \tag{П 2.8}$$

Таким образом, пространственно-временная седенионная алгебра также включает в себя четыре группы величин.

- Абсолютные скаляры (V) и абсолютные векторы ($\vec{V}$) не изменяются при пространственной и временной инверсии.

- Временные скаляры $(V_{\mathbf{t}})$ и временные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{t}})$ изменяются (меняют знак) при временной инверсии и не изменяются при пространственной инверсии.
- Пространственные скаляры $(V_{\mathbf{r}})$ и пространственные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{r}})$ изменяются при пространственной инверсии и не изменяются при временной инверсии.
- Пространственно-временные скаляры $(V_{\mathbf{tr}})$ и пространственно-временные векторы $(\vec{V}_{\mathbf{tr}})$ изменяются и при временной, и при пространственной инверсии.

Можно ввести скалярно-векторные величины

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{V}}_0 &= V_{00} + V_{01}\mathbf{a_1} + V_{02}\mathbf{a_2} + V_{03}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_1 &= V_{10} + V_{11}\mathbf{a_1} + V_{12}\mathbf{a_2} + V_{13}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_2 &= V_{20} + V_{21}\mathbf{a_1} + V_{22}\mathbf{a_2} + V_{23}\mathbf{a_3}\,, \\
\bar{\boldsymbol{V}}_3 &= V_{30} + V_{31}\mathbf{a_1} + V_{32}\mathbf{a_2} + V_{33}\mathbf{a_3}\,.
\end{aligned} \tag{П 2.9}$$

Тогда седенион записывается в пространственно-временном базисе в следующем виде:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \bar{\boldsymbol{V}}_0 + \mathbf{e_1}\bar{\boldsymbol{V}}_1 + \mathbf{e_2}\bar{\boldsymbol{V}}_2 + \mathbf{e_3}\bar{\boldsymbol{V}}_3\,. \tag{П 2.10}$$

С другой стороны, можно ввести пространственно-временные седенионные скаляры

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}_0 &= (V_{00} + \mathbf{e_1}V_{10} + \mathbf{e_2}V_{20} + \mathbf{e_3}V_{30})\,, \\
\boldsymbol{V}_1 &= (V_{01} + \mathbf{e_1}V_{11} + \mathbf{e_2}V_{21} + \mathbf{e_3}V_{31})\,, \\
\boldsymbol{V}_2 &= (V_{02} + \mathbf{e_1}V_{12} + \mathbf{e_2}V_{22} + \mathbf{e_3}V_{32})\,, \\
\boldsymbol{V}_3 &= (V_{03} + \mathbf{e_1}V_{13} + \mathbf{e_2}V_{23} + \mathbf{e_3}V_{33})
\end{aligned} \tag{П 2.11}$$

так, что седенион запишется в векторном базисе следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{V}_1\mathbf{a_1} + \boldsymbol{V}_2\mathbf{a_2} + \boldsymbol{V}_3\mathbf{a_3}\,. \tag{П 2.12}$$

Или, вводя седенионный вектор

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{V} + \vec{V}_{\mathbf{t}} + \vec{V}_{\mathbf{r}} + \vec{V}_{\mathbf{tr}} = \boldsymbol{V}_1\mathbf{a_1} + \boldsymbol{V}_2\mathbf{a_2} + \boldsymbol{V}_3\mathbf{a_3}\,, \tag{П 2.13}$$

мы можем представить седенион в компактной форме

$$\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}_0 + \vec{\boldsymbol{V}}\,. \tag{П 2.14}$$

Произведение двух седенионов $\tilde{\boldsymbol{A}}$ и $\tilde{\boldsymbol{B}}$ может быть записано как

$$\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} = \left(\boldsymbol{A}_0 + \vec{\boldsymbol{A}}\right)\left(\boldsymbol{B}_0 + \vec{\boldsymbol{B}}\right) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0\vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{B}_0 - \left(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\right) + \left[\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right]. \qquad (\text{П } 2.15)$$

Здесь введены скалярное произведение седенионных векторов, обозначенное символом “ $\cdot$ ” и круглыми скобками:

$$\left(\vec{\boldsymbol{A}}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}\right) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3, \qquad (\text{П } 2.16)$$

и векторное произведение, обозначенное символом “$\times$” и квадратными скобками:

$$\left[\vec{\boldsymbol{A}}\times\vec{\boldsymbol{B}}\right] = \left(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2\right)\mathbf{a_1} + \left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3\right)\mathbf{a_2} + \left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1\right)\mathbf{a_3}. \qquad (\text{П } 2.17)$$

Таким образом, седенионное произведение

$$\tilde{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{F}_0 + \vec{\boldsymbol{F}} \qquad (\text{П } 2.18)$$

имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_0 &= \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_3, \\
\boldsymbol{F}_1 &= \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_1 + \left(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_3 - \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_2\right), \\
\boldsymbol{F}_2 &= \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_2 + \left(\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_3\right), \\
\boldsymbol{F}_3 &= \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{B}_3 + \left(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1\right).
\end{aligned} \qquad (\text{П } 2.19)$$

Заметим, что в седенионной алгебре произведение двух абсолютных векторов $\vec{A}$ и $\vec{B}$ равно

$$\vec{A}\vec{B} = -\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right) + \left[\vec{A}\times\vec{B}\right], \qquad (\text{П } 2.20)$$

а произведение вектора на самого себя равно

$$\vec{A}\vec{A} = -\left(\vec{A}\cdot\vec{A}\right) = -A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 \qquad (\text{П } 2.21)$$

и является отрицательной величиной.

П 2.2. Седенионное пространственное вращение и пространственно-временное сопряжение

Преобразование поворота седениона $\tilde{\boldsymbol{V}}$ на угол θ вокруг оси, задаваемой единичным вектором $\vec{n}$, реализуется с помощью седениона

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \cos\left(\theta/2\right) + \vec{n}\sin\left(\theta/2\right) \qquad (\text{П } 2.22)$$

и сопряженного седениона

$$\tilde{\boldsymbol{U}}^* = \cos(\theta/2) - \vec{n}\sin(\theta/2). \tag{П 2.23}$$

Для них справедливо соотношение:

$$\tilde{\boldsymbol{U}}\tilde{\boldsymbol{U}}^* = \tilde{\boldsymbol{U}}^*\tilde{\boldsymbol{U}} = 1. \tag{П 2.24}$$

Преобразованный седенион $\tilde{\boldsymbol{V}}'$ записывается как седеонное произведение следующего вида:

$$\tilde{\boldsymbol{V}}' = \tilde{\boldsymbol{U}}^*\,\tilde{\boldsymbol{V}}\,\tilde{\boldsymbol{U}}\ . \tag{П 2.25}$$

Таким образом, преобразованный седенион $\tilde{\boldsymbol{V}}'$ равен

$$\tilde{\boldsymbol{V}}' = \left(\cos(\theta/2) - \vec{n}\sin(\theta/2)\right)\left(\boldsymbol{V_0} + \vec{\boldsymbol{V}}\right)\left(\cos(\theta/2) + \vec{n}\sin(\theta/2)\right) =$$
$$= \boldsymbol{V_0} + \vec{\boldsymbol{V}}\cos\theta + \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{\boldsymbol{V}}\right)(1-\cos\theta) - \left[\vec{n}\times\vec{\boldsymbol{V}}\right]\sin\theta. \tag{П 2.26}$$

Ясно видно, что скалярная часть седениона не преобразуется, в то время как векторная часть $\vec{V}$ поворачивается на угол θ вокруг $\vec{n}$.

Операции временной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{t}}$), пространственной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{r}}$) и пространственно-временной инверсии ($\hat{R}_{\mathbf{tr}}$) связаны с преобразованиями в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и осуществляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{R}_{\mathbf{t}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_2\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_2 = \bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} - \mathbf{e}_1\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} + \mathbf{e}_2\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \mathbf{e}_3\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}, \\ \hat{R}_{\mathbf{r}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_1\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_1 = \bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} + \mathbf{e}_1\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \mathbf{e}_2\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} - \mathbf{e}_3\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}, \\ \hat{R}_{\mathbf{tr}}\tilde{\boldsymbol{V}} &= -\mathbf{e}_3\tilde{\boldsymbol{V}}\mathbf{e}_3 = \bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{0}} - \mathbf{e}_1\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{1}} - \mathbf{e}_2\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{2}} + \mathbf{e}_3\bar{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{3}}. \end{aligned} \tag{П 2.27}$$

П 2.3. Седенионные преобразования Лоренца

В седенионной алгебре релятивистский четырехмерный вектор события представляется в следующей форме:

$$\tilde{\boldsymbol{S}} = \mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r}\ . \tag{П 2.28}$$

Квадрат этой величины равен

$$\tilde{\boldsymbol{S}}\ \tilde{\boldsymbol{S}} = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \tag{П 2.29}$$

и является инвариантом преобразований Лоренца. Преобразования физических величин при переходе от одной инерциальной системы к другой осуществляются с помощью седенионов

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = \cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\,, \qquad (\text{П } 2.30)$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}}^{*} = \cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{m}\sinh\vartheta\,, \qquad (\text{П } 2.31)$$

где $\tanh 2\vartheta = v/c$, v – скорость движения системы вдоль единичного вектора $\vec{m}$. Заметим, что

$$\tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\tilde{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{L}}\,\tilde{\boldsymbol{L}}^{*} = 1. \qquad (\text{П } 2.32)$$

Например, преобразованный четырехмерный вектор события $\tilde{\boldsymbol{S}}'$ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{S}}' = \tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\,\tilde{\boldsymbol{S}}\,\tilde{\boldsymbol{L}} &= \left(\cosh\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh\vartheta\,\vec{m}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct + \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r}\right)\left(\cosh\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\sinh\vartheta\,\vec{m}\right) = \\ &= \mathbf{e}_{\mathbf{t}}ct\cosh 2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\sinh 2\vartheta + \\ &+ \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{r} - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}ct\vec{m}\sinh 2\vartheta - \mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{m}\cdot\vec{r}\right)\vec{m}\left(1-\cosh 2\vartheta\right). \qquad (\text{П } 2.33)\end{aligned}$$

Разделяя в (П 2.33) величины с $\mathbf{e}_{\mathbf{t}}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{r}}$, мы получаем хорошо известные преобразования для координат и времени [31]:

$$t' = \frac{t - x\,v/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\quad x' = \frac{x - t\,v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,,\quad y' = y\,,\quad z' = z\,, \qquad (\text{П } 2.34)$$

где x – координата вдоль вектора $\vec{m}$.

Преобразования Лоренца для произвольного седениона определяются следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{V}}' = \tilde{\boldsymbol{L}}^{*}\,\tilde{\boldsymbol{V}}\,\tilde{\boldsymbol{L}}\;. \qquad (\text{П } 2.35)$$

При этом компоненты преобразованного седениона определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned}
&V' = V\,,\\
&V'_{\mathbf{tr}} = V_{\mathbf{tr}}\,,\\
&V'_{\mathbf{r}} = V_{\mathbf{r}}\cosh 2\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\sinh 2\vartheta\,,\\
&V'_{\mathbf{t}} = V_{\mathbf{t}}\cosh 2\vartheta + \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\sinh 2\vartheta\,, \qquad (\text{П } 2.36)\\
&\vec{V}' = \vec{V}\cosh 2\vartheta - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}_{\mathbf{rt}}\right]\sinh 2\vartheta\,,\\
&\vec{V}'_{\mathbf{tr}} = \vec{V}_{\mathbf{tr}}\cosh 2\vartheta - \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{tr}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\left[\vec{m}\times\vec{V}\right]\sinh 2\vartheta\,,\\
&\vec{V}'_{\mathbf{r}} = \vec{V}_{\mathbf{r}} + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{r}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{t}}\,\vec{m}\sinh 2\vartheta\,,\\
&\vec{V}'_{\mathbf{t}} = \vec{V}_{\mathbf{t}} + \left(\vec{m}\cdot\vec{V}_{\mathbf{t}}\right)\vec{m}\,(1-\cosh 2\vartheta) - \mathbf{e}_{\mathbf{tr}}V_{\mathbf{r}}\,\vec{m}\sinh 2\vartheta\,.
\end{aligned}$$

П 2.4. Подалгебры пространственно-временных седенионов

Введенный ранее скалярно-векторный седенионный базис позволяет конструировать различные типы гиперкомплексных чисел меньшей размерности. Например, можно ввести пространственно-временные комплексные числа вида

$$Z_{\mathbf{t}} = z_1 + \mathbf{e_t} z_2 , \quad (\text{П } 2.37)$$

$$Z_{\mathbf{r}} = z_1 + \mathbf{e_r} z_2 , \quad (\text{П } 2.38)$$

$$Z_{\mathbf{tr}} = z_1 + \mathbf{e_{tr}} z_2 , \quad (\text{П } 2.39)$$

которые обладают всеми свойствами комплексных чисел, однако по-разному преобразуются при пространственно-временном сопряжении и седенионных преобразованиях Лоренца. Кроме того, можно ввести различные типы кватернионов, которые отличаются своими свойствами по отношению к операциям пространственного и временного сопряжения:

$$\hat{q} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_0} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \quad (\text{П } 2.40)$$

$$\hat{q}_{\mathbf{t}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_t} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \quad (\text{П } 2.41)$$

$$\hat{q}_{\mathbf{r}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_r} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) , \quad (\text{П } 2.42)$$

$$\hat{q}_{\mathbf{tr}} = q_0 \mathbf{a_0} + \mathbf{e_{tr}} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) . \quad (\text{П } 2.43)$$

Абсолютный кватернион (П 2.40) представляет собой сумму абсолютного скаляра и абсолютного вектора. Он не изменяется под действием операций пространственно-временного сопряжения. Временной кватернион $\hat{q}_{\mathbf{t}}$, пространственный кватернион $\hat{q}_{\mathbf{r}}$ и пространственно-временной кватернион $\hat{q}_{\mathbf{tr}}$ изменяются под действием операций пространственно-временного сопряжения в соответствии с правилами коммутации базисных элементов $\mathbf{e_t}$, $\mathbf{e_r}$, $\mathbf{e_{tr}}$. Например, операция временного сопряжения (см. (П 2.27)) кватерниона $\hat{q}_{\mathbf{t}}$ сводится к преобразованию следующего вида:

$$\hat{R}_{\mathbf{t}} \hat{q}_{\mathbf{t}} = -\mathbf{e_r} \hat{q}_{\mathbf{t}} \mathbf{e_r} = q_0 \mathbf{a_0} - \mathbf{e_t} \left(q_1 \mathbf{a_1} + q_2 \mathbf{a_2} + q_3 \mathbf{a_3} \right) . \quad (\text{П } 2.44)$$

Кроме того, седенионный базис позволяет также конструировать различные типы пространственно-временных восьмикомпонентных октонионов:

$$\breve{G}_{\mathbf{t}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_t}G_{10} + \mathbf{e_t}\left(G_{11}\mathbf{a_1} + G_{12}\mathbf{a_2} + G_{13}\mathbf{a_3}\right), \qquad (\text{П } 2.45)$$

$$\breve{G}_{\mathbf{r}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_r}G_{20} + \mathbf{e_r}\left(G_{21}\mathbf{a_1} + G_{22}\mathbf{a_2} + G_{23}\mathbf{a_3}\right), \qquad (\text{П } 2.46)$$

$$\breve{G}_{\mathbf{tr}} = G_{00} + G_{01}\mathbf{a_1} + G_{02}\mathbf{a_2} + G_{03}\mathbf{a_3} + \mathbf{e_{tr}}G_{30} + \mathbf{e_{tr}}\left(G_{31}\mathbf{a_1} + G_{32}\mathbf{a_2} + G_{33}\mathbf{a_3}\right). \qquad (\text{П } 2.47)$$

П 2.5. Седенионные уравнения релятивистской квантовой механики

В седенионной алгебре соотношение Эйнштейна для энергии и импульса частицы

$$E^2 - c^2 p^2 - m_0^2 c^4 = 0 \qquad (\text{П } 2.48)$$

может быть представлено в виде

$$\left(\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + i\mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right)\left(\mathbf{e_t}E + \mathbf{e_r}c\vec{p} + i\mathbf{e_{tr}}m_0c^2\right) = 0\,. \qquad (\text{П } 2.49)$$

Отсюда, заменяя классические энергию E и импульс $\vec{p}$ соответствующими операторами

$$\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{и} \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}\,, \qquad (\text{П } 2.50)$$

получаем седенионное волновое уравнение для релятивистской частицы:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0\,, \quad (\text{П } 2.51)$$

где волновая функция является седенионом

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}(t,\vec{r}) = \boldsymbol{\psi}_0(t,\vec{r}) + \vec{\boldsymbol{\psi}}(t,\vec{r})\,. \qquad (\text{П } 2.52)$$

Соответствующее уравнение для электрически заряженной частицы в электромагнитном поле имеет следующий вид:

$$\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e_t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\times$$
$$\times\left(\mathbf{e_t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e_t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi - \mathbf{e_r}\vec{\nabla} + \mathbf{e_r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A} + \mathbf{e_{tr}}\frac{m_0c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}} = 0. \qquad (\text{П } 2.53)$$

Это уравнение описывает частицу со спином 1/2 [29].

Среди решений уравнения (П 2.51) существует специальный класс, у которого волновые функции удовлетворяют волновому уравнению первого порядка:

$$\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0\,. \qquad (\text{П } 2.54)$$

Для заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле это уравнение имеет вид

$$\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{ie}{\hbar c}\varphi-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}+\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{ie}{\hbar c}\vec{A}+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{\psi}}=0 \qquad (\text{П } 2.55)$$

и описывает частицу со спином 1/2 [30].

П 2.6. Седенионное волновое уравнение для поля с массивным квантом

Седеонное неоднородное волновое уравнения для силового поля с массой кванта, не равной нулю, имеет следующий вид:

$$\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}+\mathbf{e}_\mathbf{tr}\frac{m_0 c}{\hbar}\right)\tilde{\boldsymbol{W}}=\tilde{\boldsymbol{J}}\,. \qquad (\text{П } 2.56)$$

Здесь $\tilde{\boldsymbol{W}}$ – потенциал поля, $\tilde{\boldsymbol{J}}$ – источник поля, m_0 – масса кванта поля.

В специальном случае, когда масса кванта поля равна нулю, это уравнение описывает электромагнитное поле в вакууме. Действительно, выбирая потенциал в виде

$$\tilde{\boldsymbol{W}}=\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A} \qquad (\text{П } 2.57)$$

и источник поля

$$\tilde{\boldsymbol{J}}=-\mathbf{e}_\mathbf{t}4\pi\rho-\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,, \qquad (\text{П } 2.58)$$

мы получаем уравнение

$$\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_\mathbf{t}\varphi+\mathbf{e}_\mathbf{r}\vec{A}\right)=-\mathbf{e}_\mathbf{t}4\pi\rho-\mathbf{e}_\mathbf{r}\frac{4\pi}{c}\vec{j}\,. \qquad (\text{П } 2.59)$$

После действия первого оператора в левой части уравнения (П 2.59) имеем

$$\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}\right)=$$
$$=-\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{\nabla}\varphi-\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)+\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]. \qquad (\Pi\ 2.60)$$

Используя седенионное определение полей

$$\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-\vec{\nabla}\varphi, \quad \vec{H}=\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] \qquad (\Pi\ 2.61)$$

и принимая во внимание условие калибровки Лоренца

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right)=0, \qquad (\Pi\ 2.62)$$

мы можем переписать выражение (П 2.60) в следующем виде:

$$\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\varphi+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{A}\right)=-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}+\vec{H}. \qquad (\Pi\ 2.63)$$

Тогда волновое уравнение (П 2.59) записывается как

$$\left(\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\vec{\nabla}\right)\left(-\mathbf{e}_{\mathbf{tr}}\vec{E}+\vec{H}\right)=-\mathbf{e}_{\mathbf{t}}4\pi\rho-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (\Pi\ 2.64)$$

Производя седенионное умножение в левой части уравнения (П 2.64), имеем

$$\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]+$$
$$+\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=-\mathbf{e}_{\mathbf{t}}4\pi\rho-\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j}. \qquad (\Pi\ 2.65)$$

Отсюда, разделяя величины с различными пространственно-временными свойствами, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\mathbf{e}_{\mathbf{t}}4\pi\rho,\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{H}\right]=\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\frac{4\pi}{c}\vec{j},\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\left[\vec{\nabla}\times\vec{E}\right]=-\mathbf{e}_{\mathbf{t}}\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t},\\
&\mathbf{e}_{\mathbf{r}}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{H}\right)=0.
\end{aligned} \qquad (\Pi\ 2.66)$$

Система (П 2.66) совпадает с системой уравнений Максвелла.

П 2.7. Выводы

Алгебра седенионов во многом эквивалентна алгебре седеонов. В противоположность седеонам, у которых умножение базисных элементов основано на правилах, предложенных А. Макфарлейном [24], и содержит мнимую единицу, умножение седенионов строится на правилах, предложенных В. Гамильтоном [1] для кватернионов. Между двумя этими алгебрами существует простая связь. Обозначим базис седеонов $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{M}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{M}$ (правила Макфарлейна), а базис седенионов $\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{H}$ и $\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{H}$ (правила Гамильтона). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{M} = i\mathbf{a}_{\mathbf{n}}^{H} ,$$
$$\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{M} = i\mathbf{e}_{\mathbf{n}}^{H} .$$

Таким образом, использование той или иной алгебры для описания частиц и полей определяется лишь удобством и личными пристрастиями, однако физическая сущность получаемых результатов совершенно не зависит от выбранной алгебры.

Заключение

В основе системы седеонов лежит алгебра кватернионов А. Макфарлейна, описывающая скалярные и векторные величины, дополненная пространственно-временным базисом. При этом скалярно-векторный базис седеона $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ отвечает за преобразования поворота в пространстве, а пространственно-временной базис $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_{tr}$ реализует преобразования пространственной и временной инверсии, а также обеспечивает корректные скалярно-векторные преобразования Лоренца седеонной волновой функции и пространственно-временных операторов. Совместное использование этих двух некоммутативных базисов позволяет факторизовать квадратичную форму, соответствующую соотношению Эйнштейна для энергии и импульса, и написать седеонные волновые уравнения для полей с нулевой и ненулевой массой кванта. При этом применение седеонов в электродинамике демонстрирует универсальность седеонного подхода, следуя которому из обобщенного седеонного волнового уравнения получаются все известные соотношения для электромагнитного поля посредством простого клиффордовского умножения операторов и потенциалов.

Обобщенное седеонное волновое уравнение для потенциалов поля, масса кванта которого не равна нулю, позволяет сформулировать систему уравнений первого порядка для напряженностей скалярно-векторных полей аналогичную системе уравнений Максвелла в электродинамике. Кроме того, по аналогии с электродинамикой получаются соотношения для энергии и импульса, а также для лоренцевских инвариантов данного поля. Все это позволяет поставить и решить задачу о взаимодействии источников поля в терминах энергии и силы взаимодействия между зарядами и соответствующими токами.

С другой стороны, седеонная алгебра позволяет переформулировать релятивистское уравнение Клейна–Гордона в виде седеонного волнового уравнения для седеонной волновой функции и пространственно-временных операторов. Данное уравнение допускает полевую интерпретацию в соответствии с аналогией для силовых полей с массой кванта, не равной нулю. Для данного квантового поля получаются скалярно-векторные уравнения, аналогичные уравнениям Максвелла, а также соотношения, аналогичные соотношениям для энергии и инвариантов Лоренца в электродинамике. Однако физическая интерпретация этого квантового поля не очевидна и требует дополнительных исследований.

Литература

1. W.R. Hamilton, "Lectures on quaternions", Royal Irish Academy, 1853.
2. W.R. Hamilton, "Elements of quaternions", University of Dublin Press. 1866.
3. J. Baez – The octonions, Bulletin of the American Mathematical Society, **39**(2), 145–205 (2001).
   Перевод: Д. Баэз – Октонионы, Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, **3**(1), 120 (2006).
4. K. Imaeda, M. Imaeda – Sedenions: algebra and analysis, Applied Mathematics and Computations, **115**, 77–88 (2000).
5. "Математика XIX века. Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей", под ред. А.Н. Колмогорова и А.П. Юшкевича, Москва, Наука, 1978.
6. И.Л. Кантор, А.С. Солодовников, "Гиперкомплексные числа", Москва, Наука, 1973.
7. А.В. Березин, Ю.А. Курочкин, Е.А. Толкачев, "Кватернионы в релятивистской физике", Минск, Наука и техника, 1989.
8. F. Gürsey, H.C. Tze, "On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics", Singapore: World Scientific, 1996.
9. K. Gürlebeck, W. Sprössig, "Quaternionic and Clifford calculus for physicists and engineers", John Wiley & Sons, 1997.
10. G.M. Dixon, "Division algebras: octonions, quaternions, complex numbers and the algebraic design of physics (Mathematics and its applications)", Springer, 2006.
11. D. Smith, J.H. Conway, "On quaternions and octonions", Pub. AK Peters, 2003.
12. A. Gsponer, J.P. Hurni – Quaternions in mathematical and physics (1), e-print arXiv:math-ph/0510059v3 (2006).
13. A. Gsponer, J.P. Hurni – Quaternions in mathematical and physics (2), e-print arXiv:math-ph/0511092v3 (2006)
14. W.P. Joyce – Dirac theory in spacetime algebra: I. The generalized bivector Dirac equation, Journal of Physics A: Mathematical and General, **34**, 1991–2005 (2001).
15. C. Cafaro, S.A. Ali – The spacetime algebra approach to massive classical electrodynamics with magnetic monopoles, Advances in Applied Clifford Algebras, **17**, 23–36 (2006).
16. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Reformulation of relativistic quantum mechanics equations with non-commutative sedeons, Applied Mathematics, **4**(10C), 53–60 (2013).

17. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Noncommutative sedeons and their application in field theory, arXiv: 1111.4035[math-ph] (2015).
18. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Sedeonic equations of gravitoelectromagnetism, Journal of Modern Physics, **50**(10), 917–927 (2014).
19. S.V. Mironov, V.L. Mironov – Sedeonic equations of massive fields, International Journal of Theoretical Physics, **54**(1), 153–168 (2015).
20. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Two types of Lorentz transformations for massless fields, Journal of Geometry and Symmetry in Physics, **44**, 83–96 (2017).
21. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Gauge invariance of sedeonic equations for massive and massless fields, International Journal of Theoretical Physics, **55**(7), 3105–3119 (2016).
22. M. Crowe, "A history of vector analysis", University Notre Dame Press, 1967.
23. Н.В. Александрова, "Из истории векторного исчисления", Москва, МАИ, 1992.
24. A. Macfarlane – Hyperbolic quaternions, Proceedings of the Royal Society at Edinburgh, 1899–1900 session, pp. 169–181 (1900).
25. W. Pauli – Zur Quantenmechanik des Magnetischen Elektrons, Zeitschrift für Physik, **43**(9-10), 601–623 (1927).
26. P.A.M. Dirac – The quantum theory of the electron, Proceedings of Royal Society at London, Series A, **117**(778), 610–624 (1928).
27. П.А.М. Дирак, "Принципы квантовой механики", Москва, Наука, 1979.
28. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Octonic representation of electromagnetic field equations, Journal of Mathematical Physics, **50**, 012901 1–10 (2009).
29. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Octonic second-order equations of relativistic quantum mechanics, Journal of Mathematical Physics, **50**, 012302 1–13 (2009).
30. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Octonic first-order equations of relativistic quantum mechanics, International Journal of Modern Physics A, **24**(22), 4157–4167 (2009).
31. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "Теория поля", Москва, Наука, 1973.
32. P.A.M. Dirac – Quantised singularities in the electromagnetic field, Proceedings of Royal Society at London. Ser. A., **133**, 60–72 (1931).
33. P.A.M. Dirac – The theory of magnetic poles, Physical Review, **74**, 817 (1948).
34. J. Schwinger – A magnetic model of matter, Science, **165**, 757 (1969).
35. J.C. Maxwell – A dynamical theory of the electromagnetic field, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **155**, 459–512 (1865.)
36. O. Heaviside – A gravitational and electromagnetic analogy, The Electrician, **31**, 281–282 (1893).

37. V. Majernik – Field approach to gravitation and its significance in astrophysics, Astrophysics and Space Science, **14**, 265–285 (1971).
38. V. Majernik – Quaternionic formulation of the classical fields, Advances in Applied Clifford Algebras, **9**(1), 119–130 (1999).
39. S. Demir, M. Tanişli, T. Tolan – Octonic gravitational field equations, International Journal of Modern Physics A, **28**(21), 1350112 (2013).
40. S. Ulrych – Gravitoelectromagnetism in a complex Clifford algebra, Physics Letters B, **633**, 631–635 (2006).
41. C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, "Gravitation", W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
42. M.L. Ruggiero, A. Tartaglia – Gravitomagnetic effects, Il Nuovo Cimento B, **117**, 743–768 (2002).
43. B. Mashhoon, "Gravitoelectromagnetism: a brief review", in "The Measurement of Gravitomagnetism: A Challenging Enterprise", edited by L. Iorio (NOVA Science, Hauppage, New York) ch. 3, 29–39, 2007.
44. S. Schwebel – Newtonian gravitational field theory, International Journal of Theoretical Physics, **3**(4), 315–330 (1970).
45. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, "Квантовая электродинамика", Москва, Наука, 1980.
46. S. Ulrych – The Poincare mass operator in terms of a hyperbolic algebra, Physics Letters B, **612**(1-2), 89 (2005).
47. N. Candemir, M. Tanişli, K. Özdas, S. Demir – Hyperbolic octonionic Proca-Maxwell equations, Zeitschrift fur Naturforschung A, **63a**, 15–18, (2008).
48. S. Ulrych – Considerations on the hyperbolic complex Klein-Gordon equation, Journal of Mathematical Physics, **51**(6), 063510 (2010).
49. S. Demir, M. Tanişli – A compact biquaternionic formulation of massive field equations in gravi-electromagnetism, European Physical Journal – Plus, **126**, 115 1–12 (2011).
50. R. Penney – Octonions and Dirac equation, American Journal of Physics, **36**, 871 (1968).
51. A.J. Davies – Quaternionic Dirac equation, Physical Review D, **41**(8), 2628 (1990).
52. S. De Leo, P. Rotelli – Quaternion scalar field, Physical Review D, **45**(2), 575 (1992).
53. S. De Leo, K. Abdel-Khalek – Octonionic Dirac equation, Progress of Theoretical Physics, **96**, 833 (1996).
54. S. Demir, M. Tanişli – Sedenionic formulation for generalized fields of dyons, International Journal of Theoretical Physics, **51**(4), 1239–1253 (2012).

55. L.E. Dickson – On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem, Annals of Mathematics (Second Series), **20**(3), 155–171 (1919).
56. J.D. Jackson, L.B. Okun – Historical roots of gauge invariance, Reviews of Modern Physics, **73**(3), 663 (2001).
57. L.-Ch. Tu, J. Luo, G.T. Gillies – The mass of the photon, Reports on Progress in Physics, **68**, 77 (2005).
58. V.L. Mironov, S.V. Mironov – Associative space-time sedenions and their application in relativistic quantum mechanics and field theory, Applied Mathematics, **6**(1), 46–56 (2015).

Дополнительная литература

Кватернионы

59. S.L. Adler, "Quaternionic quantum mechanics and quantum fields", New York: Oxford University Press, 1995.
60. S.L. Adler – Time-dependent perturbation theory for quaternionic quantum mechanics, with application to CP nonconservation in K-meson decays, Physical Review D, **34**(6), 1871–1877, (1986).
61. S.L. Adler – Scattering and decay theory for quaternionic quantum mechanics, and the structure of induced T nonconservation, Physical Review D, **37**(12), 3654–3662 (1988).
62. A.J. Davies, B.H.J. McKellar – Nonrelativistic quaternionic quantum mechanics in one dimension, Physical Review A, **40**(8), 4209–4214, (1989).
63. S. De Leo – Quaternionic electroweak theory, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics, **22**(8), 1137 (1996).
64. K. Imaeda – A new formulation of classical electrodynamics, Nuovo cimento, **32**(1), 138–162 (1976).
65. M. Tanışlı – Gauge transformation and electromagnetism with biquaternions, Europhysics Letters, **74**(4), 569–573 (2006).
66. S. Demir, K. Özdas – Dual quaternionic reformulation of classical electromagnetism, Acta Physica Slovaca, **53**(6), 429–436 (2003).
67. S. Demir – Matrix realization of dual quaternionic electromagnetism, Central European Journal of Physics, **5**(4), 487–506 (2007).
68. S. Demir, M. Tanişli, N. Candemir – Hyperbolic quaternion formulation of electromagnetism, Advances in Applied Clifford Algebras, **20**(3–4), 547–563 (2010).

69. M. Tanişli , M.E. Kansu, S. Demir – Supersymmetric quantum mechanics and euclidean Dirac operator with complexified quaternions, Modern Physics Letters A, **28**(8), 1350026 (2013).
70. S. Ulrych – Higher spin quaternion waves in the Klein-Gordon theory, International Journal of Theoretical Physics, **52**(1), 279 (2013).
71. V.V. Kravchenko – Quaternionic reformulation of Maxwell's equations for inhomogeneous media and new solutions, arXiv:math-ph/0104008 (2001).
72. V.G. Kravchenko, V.V. Kravchenko – Quaternionic factorization of the Schrödinger operator and its applications to some first order systems of mathematical physics, Journal of Physics A, **36**(44), 11285–11297 (2003).
73. S.M. Grudsky, K.V. Khmelnytskaya, V.V. Kravchenko – On a quaternionic Maxwell equation for the time-dependent electromagnetic field in a chiral medium, Journal of Physics A, **37**(16), 4641–4647 (2004).

Октонионы

74. S. Okubo, "Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics" (Montroll memorial lecture series in mathematical physics, 2) Cambridge University Press, 1995.
75. M. Gogberashvili – Octonionic electrodynamics, Journal of Physics A: Mathematical and General, **39**, 7099–7104 (2006).
76. A. Gamba – Maxwell's equations in octonion form, Nuovo Cimento A, **111**(3), 293–302 (1998).
77. T. Tolan, K. Özdas, M. Tanişli – Reformulation of electromagnetism with octonions, Nuovo Cimento B, **121**(1), 43–55 (2006).
78. A.A. Bogush, Yu.A. Kurochkin – Cayley–Dickson procedure, relativistic wave equations and supersymmetric oscillators, Acta Applicandae Mathematicae, **50**, 121–129 (1998)
79. M. Tanişli, M.E. Kansu – Octonionic Maxwell's equations for bi-isotropic media, Journal of Mathematical Physics, **52**(5), 053511 (2011).
80. M. Tanişli, M.E. Kansu, S. Demir – A new approach to Lorentz invariance on electromagnetism with hyperbolic octonions, European Physical Journal – Plus, **127**(6), 69 (2012).
81. S. Demir – Hyperbolic octonion formulation of gravitational field equations, International Journal of Theoretical Physics, **52**(1), 105–116 (2013).
82. J. Köplinger – Nonassociative quantum theory on octooctonion algebra, Journal of Physical Mathematics, **1**, S090501 (2009).
83. B.C. Chanyal, P.S. Bisht, O.P.S. Negi – Generalized octonion electrodynamics, International Journal of Theoretical Physics, **49**(6), 1333 (2010).
84. V. Dzhunushaliev – Nonassociativity, supersymmetry, and hidden variables, Journal of Mathematical Physics, **49**, 042108 (2008).

85. V. Dzhunushaliev – Hidden structures in quantum mechanics, Journal of Generalized Lie Theory and Applications, **3**(1), 33–38 (2009).
86. B.C. Chanyal, P.S. Bisht, O.P.S. Negi – Octonion and conservation laws for dyons, International Journal of Modern Physics A, **28**(26), 1350125 (2013).
87. M.E. Kansu – An analogy between macroscopic and microscopic systems for Maxwell's equations in higher dimensions. European Physical Journal – Plus, **128**, 149 (2013).

Седенионы

88. K. Carmody – Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions, Applied Mathematics and Computation, **28**, 47–72 (1988).
89. K. Carmody – Circular and hyperbolic quaternions, octonions, and sedenions – further results, Applied Mathematics and Computation, **84**, 27–47 (1997).
90. J. Köplinger – Dirac equation on hyperbolic octonions, Applied Mathematics and Computation, **182**, 443–446 (2006).
91. V. Dzhunushaliev – Toy models of a nonassociative quantum mechanics, Advances in High Energy Physics, Volume 2007, Article ID 12387, 10 pages.

Алгебры Клиффорда

92. B. Jancewicz, "Multivectors and Clifford algebra in electrodynamics", World Scientific, 1988.
93. W.M. Pezzaglia – Clifford algebra derivation of the characteristic hypersurfaces of Maxwell's equations, e-print arXiv:hep-th/9211062v1 (1992).
94. W.E. Baylis, G. Jones – The Pauli algebra approach to special relativity, Journal of Physics A: Mathematical and General, **22**, 1–15 (1989).
95. A.M. Shaarawi – Clifford algebra formulation of an electromagnetic charge-current wave theory, Foundations of physics, **30**(11), 1911–1941 (2000).
96. D. Hestenes – Observables, operators, and complex numbers in the Dirac theory, Journal of Mathematical Physics, **16**, 556–572 (1975).
97. D. Hestenes, "Clifford algebra and the interpretation of quantum mechanics". In: "Clifford algebra and their applications in mathematical physics". (Eds. J.S.R.Chisholm, A.K.Commons) Reidel, Dordrecht / Boston, 321–346 (1986).
98. T. Tolan, M. Tanişli, S. Demir – Octonic form of Proca-Maxwell's equations and relativistic derivation of electromagnetism, International Journal of Theoretical Physics, **52**(12), 4488–4506 (2013).
99. S. Demir, M. Tanişli, T. Tolan – Octonic gravitational field equations, International Journal of Modern Physics A, **28**(21), 1350112 (2013).

Миронов Виктор Леонидович

Миронов Сергей Викторович

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ СЕДЕОНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ И ТЕОРИИ ПОЛЯ

Редактор Н.А. Лившиц
Корректор Н.В. Счастнева
Оригинал-макет подготовлен авторами

Подписано в печать с оригинал макета 6.07.2018
Уч.-изд. л. 5,5. Усл. печ. л. 8,5. Формат (60 × 90) 1/16
Тираж 100 экз. Заказ № 160

Издательство СО РАН
630090, Новосибирск, 90, Морской проспект, 2